

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้าย
ด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9**

Generalized beauty : the product of the arranged number by increasing
to the left by odd number and the digit number 9**

สุจิตรา เหลาแตว และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

Sujittra Loawtaew and Aiyared Iampan*

School of Science, University of Phayao

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด ผลการศึกษาพบว่ารูปทั่วไปของผลคูณนี้เป็นดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1}$$

คำสำคัญ : จำนวนเศษเหลือ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้าย
ด้วยเลขคี่

* ผู้ประสานงานหลัก (Corresponding Author)
e-mail: aiyared.ia@up.ac.th

Generalized beauty : the product of the arranged number by increasing
to the left by odd number and the digit number 9

**งานวิจัยเรื่องนี้ได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

Abstract

This paper applies the remainder number and the Principle of Mathematical Induction to study and find a general form of the product of the arranged number by increasing to the left by odd number and the digit number. The results show that the general form of the product as follows

$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1} \text{ for all positive integer } n.$$

Keyword : remainder number, Principle of Mathematical Induction, arranged number by increasing to the left by odd number

บทนำ

การคำนวณหาผลคูณของจำนวนหลายหลักนั้น แม้ว่าจะไม่ใช่เรื่องยุ่งยากมากนัก แต่ถ้าหากเราจะคำนวณหาผลลัพธ์ก็ต้องใช้เวลาพอสมควร เราจึงหาเครื่องมือช่วยในการคำนวณ อาทิ เครื่องคิดเลข คอมพิวเตอร์ แต่เนื่องจากเครื่องคิดเลขมีข้อเสียที่คิดเลขจำนวนหลายหลักไม่ได้ และคอมพิวเตอร์ก็ไม่สะดวกในการพกพา เราจึงต้องหาสูตรมาใช้ในการคำนวณให้เหมาะสม ด้วยเหตุนี้ การศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด ที่เราสังเกตเห็นความสัมพันธ์บางอย่างจึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจ และหากเราสามารถหารูปทั่วไปที่แน่นอน หรือสูตรสำหรับการคำนวณหาผลคูณนี้ได้ จะเป็นการเพิ่มความสะดวกในการหาผลลัพธ์ของการคำนวณหาผลคูณนี้ และหากสูตรนี้ได้รับการพัฒนาเป็นโปรแกรมหรือเกมคอมพิวเตอร์จากนักคอมพิวเตอร์แล้ว จะทำให้ผู้เรียนสนุกสนานกับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ยิ่งขึ้น

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด โดยทฤษฎีบทหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือและการพิสูจน์ คือขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = b \cdot q + r \text{ และ } 0 \leq r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction)

กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ต่อไปเป็นจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการขยายการศึกษาครั้งนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ (2) และ ญัฐติ และ อัยเรศ (3) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b = 10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q (ผลหาร) และจำนวนเต็ม r (เศษเหลือ) ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ ฉะนั้น r เป็นจำนวนหนึ่งหลัก หรือเลขโดดนั่นเอง สัญลักษณ์จำนวนเศษเหลือสำหรับ a โดย

$$a := {}_q r \quad (I)$$

เช่น

$$\begin{array}{cccccc} 0 = {}_0 0 & 10 = {}_1 0 & 20 = {}_2 0 & 50 = {}_5 0 & 110 = {}_{11} 0 & 120 = {}_{12} 0 \\ 1 = {}_0 1 & 11 = {}_1 1 & 21 = {}_2 1 & 51 = {}_5 1 & 111 = {}_{11} 1 & 121 = {}_{12} 1 \\ 2 = {}_0 2 & 12 = {}_1 2 & 22 = {}_2 2 & 52 = {}_5 2 & 112 = {}_{11} 2 & 122 = {}_{12} 2 \\ \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ 9 = {}_0 9 & 19 = {}_1 9 & 29 = {}_2 9 & 59 = {}_5 9 & 119 = {}_{11} 9 & 129 = {}_{12} 9 \end{array}$$

และ

$$\begin{array}{cccccc} 0 = {}_0 0 & -10 = {}_{-1} 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -50 = {}_{-5} 0 & -110 = {}_{-11} 0 & -120 = {}_{-12} 0 \\ -1 = {}_{-1} 9 & -11 = {}_{-2} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -51 = {}_{-6} 9 & -111 = {}_{-12} 9 & -121 = {}_{-13} 9 \\ -2 = {}_{-1} 8 & -12 = {}_{-2} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -52 = {}_{-6} 8 & -112 = {}_{-12} 8 & -122 = {}_{-13} 8 \\ \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ -9 = {}_{-1} 1 & -19 = {}_{-2} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -59 = {}_{-6} 1 & -119 = {}_{-12} 1 & -129 = {}_{-13} 1 \end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงเขียน ${}_q r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \leq r < 10$

บทนิยาม 1 กำหนดให้ ${}_z R$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_z R = \{{}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\} \quad (II)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_z R$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

บทตั้ง 1 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = q^r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} -q^0 & ; r = 0 \\ -(q+1)(10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (I) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาคือจำนวนเศษเหลือ ซึ่งไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่าย จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือจาก (I) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ q^r เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทดจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $15_{23}173_698_275_4$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 15_{23}173_698_275_4 &= {}_01_05_{23}1_17_03_69_08_{-2}7_05_04 \\ &= 0(1+0)(5+23)(1+1)(7+0)(3+6)(9+0)(8-2)(7+0)(5+0)(4+0) \\ &= 1(28)278996754 \\ &= 1_2827996754 \\ &= (1+2)27996754 \\ &= 327996754 \end{aligned}$$

ในการศึกษาหัวข้อถัดไป จะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็ม n เช่น $\#(7)$ แทนจำนวนของเลข 7 ที่เรียงติดกัน เช่น $\underbrace{2277\ldots79}_{\#(7)=11} = 2277777777779$ และจะแสดงผล

การศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่พบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 จนนำไปสู่การศึกษาและการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักด้วย

บทตั้ง 2 สำหรับทุก $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่าตัวผกผันภายใต้ (ของ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ คือ $(-x_1)(-x_2)(-x_3)\dots(-x_n)$ นั่นคือ $(-x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (-x_1)(-x_2)(-x_3)\dots(-x_n)$)

ทฤษฎีบท 3 กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \leq s_i \leq 9$ จะได้ว่า

$$\underbrace{s_1 s_2 s_3 \dots s_n}_m = m \cdot \underbrace{1000 \dots 0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \dots s_n \quad (\text{IV})$$

ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 ทำให้เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ระหว่างจำนวนของเลขคี่กับจำนวนของเลขโดด 7 ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{llll} (2 \cdot 1 - 1) \times 9 & = & 1 \times 9 & = (2 \cdot 1 - 2) 9 : \#(7) = 0 \\ (2 \cdot 2 - 1) 1 \times 9 & = & 31 \times 9 & = (2 \cdot 2 - 2) 79 : \#(7) = 1 \\ (2 \cdot 3 - 1) 31 \times 9 & = & 531 \times 9 & = (2 \cdot 3 - 2) 779 : \#(7) = 2 \\ (2 \cdot 4 - 1) 531 \times 9 & = & 7531 \times 9 & = (2 \cdot 4 - 2) 7779 : \#(7) = 3 \\ (2 \cdot 5 - 1) 7531 \times 9 & = & 97531 \times 9 & = (2 \cdot 5 - 2) 77779 : \#(7) = 4 \\ (2 \cdot 6 - 1) 97531 \times 9 & = & 197531 \times 9 & = (2 \cdot 6 - 2) 777779 : \#(7) = 5 \\ (2 \cdot 7 - 1) (11) 97531 \times 9 & = & 13197531 \times 9 & = (2 \cdot 7 - 2) 7777779 : \#(7) = 6 \\ (2 \cdot 8 - 1) (13) (11) 97531 \times 9 & = & 153197531 \times 9 & = (2 \cdot 8 - 2) 77777779 : \#(7) = 7 \\ (2 \cdot 9 - 1) (15) (13) (11) 97531 \times 9 & = & 1753197531 \times 9 & = (2 \cdot 9 - 2) 777777779 : \#(7) = 8 \\ (2 \cdot 10 - 1) (17) (15) (13) (11) 97531 \times 9 & = & 19753197531 \times 9 & = (2 \cdot 10 - 2) 7777777779 : \#(7) = 9 \end{array} \quad (\text{V})$$

จากผลคูณใน (V) จะสังเกตเห็นว่าผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่ $(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \leq n \leq 10$ กับเลขโดด 9 เป็นจำนวนหลายหลัก ซึ่งหลักแรกเป็นเลขโดด 9 หลักสุดท้ายเป็นจำนวน $2 \cdot n - 2$ และหลักที่เหลือจำนวน $n-1$ หลัก เป็นเลขโดด 7 ทั้งหมด โดยสรุปเป็นรูปทั่วไปจากข้อสังเกต สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $1 \leq n \leq 10$ ได้ดังนี้

$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1}$$

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างเพื่อนำไปสู่การศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9

ตัวอย่าง 1 ผลลัพธ์ของ 2530864197531×9 สามารถหาผลลัพธ์ได้ถูกต้องจากข้อสังเกตที่เราพบ
ดังนี้

$$\begin{aligned}
 2530864197531 \times 9 &= {}_2 3_2 1_1 9_1 7_1 5_1 3_1 197531 \times 9 \\
 &= (2 \cdot 12 - 1)(21)(19)(17)(15)(13)(11)97531 \times 9 \\
 &= (2 \cdot 12 - 2) \underbrace{7777777777}_{{\#(7)=12-1=11}} 9 \\
 &= (22) \underbrace{7777777777}_{{\#(7)=11}} 9 \\
 &= {}_2 \underbrace{2777777777}_{{\#(7)=11}} 9 \\
 &= 22 \underbrace{7777777777}_{{\#(7)=11}} 9
 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ

2530864197531 · 9

22777777777779

#(7)=10 #(7)=1

รูปที่ 1 : 2530864197531×9

ด้วยเหตุนี้เราจึงตั้งข้อสงสัยต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 ได้หรือไม่

(2) ถ้าเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลคูณนี้จะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบหรือไม่

บทตั้ง 3 กำหนดให้ $(2 \cdot n) 0 = 2 \cdot n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(2 \cdot n) 0 = 20 \cdot n \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $(2 \cdot 1) 0 = 20 = 20 \cdot 1$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า $(2 \cdot k) 0 = 20 \cdot k$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} (2 \cdot (k+1))0 &= ((2 \cdot k)+2)0 \\ &= ((2 \cdot k)+2) (0+0) \\ &= (2 \cdot k)0+20 \\ &= 20 \cdot k+20 \quad (\text{โดยสมมติฐาน}) \\ &= 20 \cdot (k+1) \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$(2 \cdot n)0 = 20 \cdot n \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญที่สุดของบทความนี้ ซึ่งจะตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อข้างต้นของผู้เขียนได้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1} \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $((2 \cdot 1)-1) \times 9 = 9$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1}$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิสูจน์ว่า

$$\begin{aligned}
 (2 \cdot (k+1) - 1) \dots 531 \times 9 &= (2 \cdot k + 1) \dots 531 \times 9 \\
 &= (2 \cdot k + 1)(2 \cdot (k-1) + 1) \dots 531 \times 9 \\
 &= (2 \cdot k + 1)(2 \cdot k - 1) \dots 531 \times 9 \\
 &= [(2 \cdot k + 1) \underbrace{00 \dots 0}_{\#(0)=k} + (2 \cdot k - 1) \dots 531] \times 9 \\
 &= ((2 \cdot k + 1) \underbrace{00 \dots 0}_{\#(0)=k} \times 9) + ((2 \cdot k - 1) \dots 531 \times 9) \\
 &= ((2 \cdot k + 1) \underbrace{00 \dots 0}_{\#(0)=k} \times 9) + (2 \cdot k - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k-1} \\
 &= ((2 \cdot k + 1) \times 9) \underbrace{00 \dots 0}_{\#(0)=k} + (2 \cdot k - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k-1} \\
 &= (18 \cdot k + 9) \underbrace{00 \dots 0}_{\#(0)=k} + (2 \cdot k - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k-1} \\
 &= (18 \cdot k + 9 + 2 \cdot k - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k-1} \\
 &= (20 \cdot k + 7) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k-1} \\
 &= ((2 \cdot k)0 + 7) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k-1} \\
 &= ((2 \cdot k)0) \underbrace{00 \dots 0}_{\#(0)=k} + \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k} \\
 &= (2 \cdot k) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=k} \\
 &= (2 \cdot (k+1) - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=(k+1)-1}
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

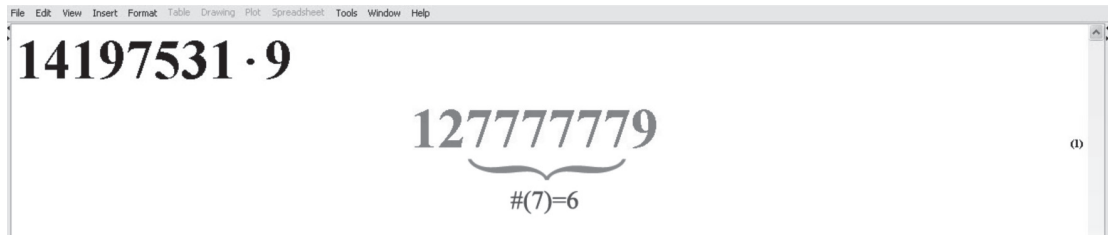
$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1} \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ 14197531×9

วิธีทำ เนื่องจาก $14197531 = {}_13_197531 = (2 \cdot 7 - 1)(11)97531$ และโดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 14197531 \times 9 &= (2 \cdot 7 - 1)(11)97531 \times 9 \\
 &= (2 \cdot 7 - 2) \underbrace{77 \dots 7}_{{\#(7)=7-1=6}} 9 \\
 &= (12) \underbrace{77 \dots 7}_{{\#(7)=6}} 9 \\
 &= {}_12 \underbrace{77 \dots 7}_{{\#(7)=6}} 9 \\
 &= 127777779
 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 2 : 14197531×9

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ 27530864197531×9

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 27530864197531 &= {}_25_23_21_9_17_15_13_1197531 \\
 &= (2 \cdot 13 - 1)(23)(21)(19)(17)(15)(13)(11)97531
 \end{aligned}$$

และโดยทฤษฎีบท 4 จะได้

$$\begin{aligned}
 27530864197531 \times 9 &= (2 \cdot 13 - 1)(23)(21)(19)(17)(15)(13)(11)97531 \times 9 \\
 &= (2 \cdot 13 - 2) \underbrace{77 \dots 7}_{{\#(7)=13-1=12}} 9 \\
 &= (24) \underbrace{77 \dots 7}_{{\#(7)=12}} 9 \\
 &= {}_24 \underbrace{77 \dots 7}_{{\#(7)=12}} 9 \\
 &= 24 \underbrace{77 \dots 7}_{{\#(7)=12}} 9
 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ

$$27530864197531 \cdot 9$$

$$2477777777777779$$

#(7)=10 #(7)=2

รูปที่ 3 : 27530864197531×9

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $564197530864197530864197531 \times 9$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$564197530864197530864197531 = {}_5 1_4 9_4 7 \dots {}_1 5_1 3_1 197531$$

$$= (2 \cdot 26 - 1)(49)(47) \dots (15)(13)(11)97531$$

และโดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$564197530864197530864197531 \times 9 = (2 \cdot 26 - 1)(49)(47) \dots (15)(13)(11)97531 \times 9$$

$$= (2 \cdot 26 - 2) \underbrace{77 \dots 7}_{{}_{\#(7)=26-1=25}} 9$$

$$= (50) \underbrace{77 \dots 7}_{{}_{\#(7)=25}} 9$$

$$= {}_5 0 \underbrace{77 \dots 7}_{{}_{\#(7)=25}} 9$$

$$= 50 \underbrace{77 \dots 7}_{{}_{\#(7)=25}} 9$$

ตรวจคำตอบ

$$564197530864197530864197531 \cdot 9$$

$$5077777777777777777777777779$$

#(7)=10 #(7)=10 #(7)=5

รูปที่ 4 : $564197530864197530864197531 \times 9$

บทแทรก 1 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(-(2 \cdot n - 1)) \dots (-5)(-3)(-1) \times 9 = -((2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1})$$

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2 และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (-(2 \cdot n - 1)) \dots (-5)(-3)(-1) \times 9 &= -((2 \cdot n - 1) \dots 531) \times 9 \\ &= -((2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1}) \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลลัพธ์ของ $(-(2 \cdot 11 - 1))(-19) \dots (-5)(-3)(-1) \times 9$

วิธีทำ โดยบทแทรก 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (-(2 \cdot 11 - 1))(-19) \dots (-5)(-3)(-1) \times 9 &= -((2 \cdot 11 - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=11-1=10}) \\ &= -((20) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=10}) \\ &= -(2 \underbrace{077 \dots 79}_{\#(7)=10}) \\ &= -20 \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=10} \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ

$$\begin{aligned} &(-(2 \cdot 11 - 1))(-19) \dots (-5)(-3)(-1) \times 9 \\ &= (-21)(-19) \dots (-5)(-3)(-1) \times 9 \\ &= {}_{-3}9 {}_{-2}1 {}_{-2}3 {}_{-2}5 {}_{-2}7 {}_{-2}9 {}_{-1}1 {}_{-1}3 {}_{-1}5 {}_{-1}7 {}_{-1}9 \times 9 \quad (\text{โดยบทตั้ง 1}) \\ &= {}_{-3}7(-1)135802469 \times 9 \\ &= {}_{-3}7 {}_{-1}9135802469 \times 9 \\ &= {}_{-3}69135802469 \times 9 \\ &= ((-3 \times \underbrace{100 \dots 0}_{\#(0)=11}) + 69135802469) \times 9 \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 3}) \\ &= -230864197531 \times 9 \\ &= -207777777779 \\ &= -20 \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=10} \end{aligned}$$

$$(-3 \cdot 100000000000 + 69135802469) \cdot 9 - \underbrace{2077777777779}_{\#(7)=10}$$

รูปที่ 5 : $((-2 \cdot 11 - 1)(-19) \dots (-5)(-3)(-1) \times 9$

บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$(2 \cdot n - 1) \dots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2) \underbrace{77 \dots 79}_{\#(7)=n-1} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

(2) รูปทั่วไปที่ได้ตามทฤษฎีบท 4 นั้นสอดคล้องกับข้อสังเกตที่เราพบ

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ ซึ่งนับได้ว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของการสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับ (2) ได้ว่ารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 เป็นอีก **ความสวยงามวางนัยทั่วไป** (generalized beauty) ในแบบคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง ยิ่งไปกว่านั้นรูปทั่วไปนี้ยังช่วยให้การคำนวณหาผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 เป็นเรื่องที่สะดวกและไม่ยุ่งยากเกินไป

References

- Clark, W. E. (2002). *Elementary Number Theory*. Department of Mathematics, University of South Florida.
- lampan, A. (2011) *Generalized beauty : the square of the number of digits as 1 at all*. *Naresuan Phayao Journal*, 4(2), 29-35. (in Thai).
- Pholasa, N. lampan A. (2013) *Generalized beauty : beginning of the group of remainder numbers*. *Naresuan Phayao Journal*, 6(1), 25-30. (in Thai).
- Muangma, A., & lampan A. (2013) *Generalized beauty : defining the many digit number that any digit as an integer*. *Academic Journal: Uttaradit Rajabhat University*, 8(2), 49-60. (in Thai)

คณะผู้เขียน

นางสุจิตรา เหลาแตว

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

19 หมู่ 2 ตำบลแม่กา อำเภอห้อง จังหวัดพะเยา 56000

e-mail : sujitra.lo@up.ac.th

นายอัยเรศ เอี่ยมพันธ์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

19 หมู่ 2 ตำบลแม่กา อำเภอห้อง จังหวัดพะเยา 56000

e-mail : aiyared.ia@up.ac.th

