

การศึกษาความสามารถและปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา
หลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสวนดุสิต
A Study of Ability and the Problems in Mathematical Proof of Educational
Bachelor Degree Students, Mathematical Program,
Suan Dusit University

ธนพรพร พฤกษ์วัน*

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต

Tanapat Brikshavana

Faculty of Science and Technology, Suan Dusit University

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ และ 2) ศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต ชั้นปีที่ 1 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 4091112 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบง่าย จำนวน 60 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นแบบทดสอบทางคณิตศาสตร์เรื่องวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับข้อความรูป $p \rightarrow q$ สถิติที่ใช้ในงานวิจัย คือ ค่าความถี่ และร้อยละ ผลการวิจัย พบว่า จำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในการพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow q$ โดยใช้วิธีพิสูจน์ทางตรงมากที่สุด คิดเป็น ร้อยละ 45 ของจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง รองลงมา คือ การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ คิดเป็นร้อยละ 41.67 ของจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง และการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง คิดเป็นร้อยละ 28.33 ของจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยปัญหาในการพิสูจน์ที่พบว่าเกิดขึ้นมากที่สุดสำหรับวิธีการพิสูจน์ทางตรง ได้แก่ ปัญหาในขั้นการแสดงการพิสูจน์ ซึ่งนักศึกษาขาดความระมัดระวังในการเขียนการพิสูจน์ มีจำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 15 ของจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง และปัญหาที่พบว่าเกิดขึ้นมากที่สุดสำหรับวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ได้แก่ ปัญหาในขั้นการแสดงการพิสูจน์ โดยนักศึกษา

* ผู้ประสานงานหลัก (Corresponding Author)
e-mail: tanabrik@gmail.com

ขาดความระมัดระวังในการเขียนการพิสูจน์เช่นกัน ซึ่งมีจำนวน 15 คน คิดเป็นร้อยละ 25 ของจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ในขณะที่ปัญหาในการพิสูจน์ที่พบว่าเกิดขึ้นมากที่สุดสำหรับวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ได้แก่ ปัญหาในขั้นการค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ โดยนักศึกษาไม่เข้าใจวิธีการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง มีจำนวน 34 คน คิดเป็นร้อยละ 56.67 ของจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง

คำสำคัญ: ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

Abstract

The purpose of this research was study the ability and the problems in mathematical proof of Educational Bachelor Degree students, Mathematical Program. The sample groups were the Educational Bachelor Degree students, Mathematical Program, Faculty of Science and Technology, Suan Dusit Rajabhat University, freshman year, who enrolled in course 4091112 “Algoritms in Mathematics Proofs” in the first semester of academic year 2014, randomly selected for 60 simple samples. The tools used in this research were the mathematical test about the mathematical proof for $p \rightarrow q$. The statistics used were frequency and percentage. The study shows that students who could prove for $p \rightarrow q$ by the direct proof method were 45% of all students in the sample group. Second, students who could prove by the contraposition method were 41.67% of all samples and the students who used the contradiction method to prove the message were 28.33% of all samples. For the problems in mathematical proof, the most common case in the direct proof method was a proof explanation. There were 9 students who lacked carefulness in proof writing which was equal to 15% of all samples. The most common problem in the contraposition method was the proof explanation as well. There were 15 students who lacked carefulness in proof writing, which was equal to 25% of all samples. The most common problem in the contradiction method was how to find the tool for proof. There were 34 students who did not understand how to start proofing by the contradiction method, which was equal to 56.67% of all samples.

Keywords: The Ability of Mathematical Proof, The Problems in Mathematical Proof

บทนำ

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการให้เหตุผลที่สำคัญที่จะพัฒนาผู้ที่ศึกษาในเรื่องนี้ให้มีระบบความคิดที่เป็นเหตุเป็นผล และมีความเข้าใจลำดับขั้นตอนในการคิดเพื่อที่จะพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องได้ ในขณะเดียวกันการพิสูจน์เป็นกระบวนการให้เหตุผลที่สำคัญอันหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่จะพัฒนาข้อความคาดการณ์ (Conjecture) ในระบบคณิตศาสตร์เรื่องนั้นๆ ว่าเป็นข้อความที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลจนยอมรับเป็นทฤษฎีบท เพื่อนำไปเป็นเหตุในการสรุปข้อความใหม่ในเรื่องที่จะศึกษากว้างขวางยิ่งขึ้น (Sienadee, 1984) ดังนั้นหากขาดความรู้ความเข้าใจในเรื่องการพิสูจน์ความคิดรวบยอดเรื่องโครงสร้างทางคณิตศาสตร์นั้นจะเกิดขึ้นไม่ได้ความสามารถในการพิสูจน์และความเข้าใจในธรรมชาติของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงเทคนิคในการพิสูจน์จึงมีความสำคัญทำให้การเรียนคณิตศาสตร์จะต้องอาศัยขั้นตอนวิธีการพิสูจน์อย่างมีเหตุผล (Saeed, 1997)

ในประเทศไทยหลักสูตรและการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานได้กำหนดให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาเรียนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น การพิสูจน์ในทางเรขาคณิต เป็นต้น จากนั้นเมื่อเข้าศึกษาในระดับอุดมศึกษา นักศึกษาที่เรียนในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรีจำเป็นต้องศึกษาคณิตศาสตร์ในลักษณะที่เกี่ยวข้องกับวิธีการพิสูจน์ในรูปแบบต่างๆ ซึ่งนักศึกษาจำเป็นต้องสามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ได้ สำหรับหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต ได้กำหนดให้นักศึกษาของหลักสูตรฯ เรียนรายวิชาในหมวดวิชาเฉพาะด้าน กลุ่มวิชาเอกบังคับที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ เช่น ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (Algorithms in Mathematics Proofs) ระบบจำนวน (Number System) เรขาคณิตแบบยูคลิดและนอกแบบยูคลิด (Euclidean and non-Euclidean Geometry) ทฤษฎีจำนวน (Number Theory) ทฤษฎีเซต (Set Theory) คณิตวิเคราะห์ (Mathematical Analysis) พีชคณิตนามธรรม 1 (Abstract Algebra 1) และคณิตศาสตร์ประยุกต์ (Applied Mathematics) เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีรายวิชาในกลุ่มวิชาเอกเลือกอีกหลายวิชาที่ต้องศึกษาทฤษฎีโดยอาศัยการพิสูจน์ ทั้งนี้เพื่อให้นักศึกษาคณิตศาสตร์มีความมั่นใจในการเตรียมความพร้อมที่จะเป็นครูคณิตศาสตร์รอบรู้ ดังนั้นการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นการพิสูจน์จึงมีความสำคัญและจะเริ่มต้นศึกษาวิธีการพิสูจน์อย่างละเอียดในการศึกษาระดับนี้

อย่างไรก็ตามมีงานวิจัยที่ได้กล่าวถึงปัญหาในการพิสูจน์ทั้งในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานและระดับปริญญาตรี เช่น ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เป็นชั้นที่เริ่มเรียนการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ผู้สอนสาระเรขาคณิตมักพบว่า นักเรียน ไม่สามารถประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิต และพิสูจน์ไม่เป็น เช่น พิสูจน์โดยใช้เหตุและผลอย่างไม่สัมพันธ์กัน นำสิ่งที่จะต้องพิสูจน์มาเป็นข้ออ้าง แม้แต่นักเรียนเก่งก็มีปัญหาเพราะไม่สามารถแยกแยะสิ่งที่ยอมรับโดยไม่ต้องมี การพิสูจน์และสิ่งที่ต้องพิสูจน์เสียก่อนจึงจะนำไปใช้อ้างอิง เป็นต้น นอกจากนี้เมื่อมีปัญหาในการพิสูจน์เกิดขึ้นแล้วยังส่งผลต่อเจตคติของผู้เรียนคณิตศาสตร์ด้วย (Plangprasopchok, 1975) ดังนั้นปัญหาในการเรียนสำหรับผู้เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์

คือ การพิสูจน์ โดยผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และไม่ทราบว่าจะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใด จึงจะบรรลุสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ (Sonthiphaq, 1984) ทั้งนี้ในการเรียนที่เน้นการพิสูจน์ ผู้เรียนมักจะประสบปัญหาในการอ่านและเขียนการพิสูจน์อีกด้วย (Moore, 1990)

หลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ เป็นหลักสูตรใหม่ที่เปิดรับนักศึกษารุ่นแรก ในปีการศึกษา 2557 ซึ่งนักศึกษาที่เข้ามาเรียนนั้นจะต้องเรียนในรายวิชา 4091112 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นรายวิชาเอกบังคับ เพื่อที่จะนำความรู้ที่ได้รับไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนรายวิชาอื่นๆ ต่อไป นักศึกษาจึงต้องอ่าน ทำความเข้าใจ วิเคราะห์การพิสูจน์ และเขียนแสดงการพิสูจน์เองได้ อีกทั้งยังต้องเข้าใจถึงคุณค่าของการพิสูจน์ด้วย อย่างไรก็ตามยังคงมีนักศึกษาเป็นจำนวนมากที่มีปัญหาในการอ่าน และเขียนการพิสูจน์ หลายคนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการพิสูจน์ อุปสรรคในการเรียนพิสูจน์ของนักศึกษา ทั้งนี้มีงานวิจัยที่กล่าวถึงปัญหาการพิสูจน์ของนักเรียน นิสิตนักศึกษา เช่น นิสิตนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์มีความคิดเห็นต่อเนื้อหาวิชาเอกคณิตศาสตร์แต่ละรายวิชาว่าเป็นเรื่องยาก โดยให้เหตุผลว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่จะต้องมีการพิสูจน์ ซึ่งเป็นเรื่องยาก (Uthairath, 1996) อีกทั้งเป็นวิชาที่มักพบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในความรู้พื้นฐานต่างๆ มากมาย (Nimitpun, 2016) และปัจจุบันยังมีผลกระทบในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบสองภาษาเข้ามาเกี่ยวข้อง (Dechpichai, Pongsopa, Suwannateep & Tuprakay, 2016) เป็นต้น สำหรับเรื่องที่เป็นปัญหามากสำหรับนิสิตที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ คือ การพิสูจน์ ผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และไม่ทราบว่าจะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใดจึงจะบรรลุสิ่งที่ต้องการจะพิสูจน์ (Sonthipha, 1984) ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาความสามารถและปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตร ศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต เพื่อสามารถนำผลที่ได้รับจากการวิจัยนี้ไปปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนในปีการศึกษาต่อไป โดยผู้วิจัยได้ทำการศึกษาความสามารถและปัญหาการพิสูจน์โดยพิจารณาจากปัญหาที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ โดยในทางคณิตศาสตร์มีทฤษฎีบทและปัญหาหลายกรณีที่มีประโยคที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ซึ่งเป็นเรื่องสำคัญและเป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบอื่นๆ

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสวนดุสิต
2. เพื่อศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสวนดุสิต

ระเบียบวิธีการวิจัย

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร คือ นักศึกษาระดับปริญญาตรี (5 ปี) หลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา 4091112 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 จำนวน 118 คน

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักศึกษาระดับปริญญาตรี (5 ปี) หลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา 4091112 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 ที่ได้จากการสุ่มจากประชากรโดยการสุ่มตัวอย่างแบบง่าย (Sample Random Sampling) จำนวน 60 คน

2. การสร้างและพัฒนาคุณภาพเครื่องมือ

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบทดสอบทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับข้อความในรูป $p \rightarrow q$ ที่ประกอบด้วยข้อคำถามเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทางตรง วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่ และวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งที่พัฒนามาจากงานวิจัยของ Wannasatbit (2001) ซึ่งลักษณะแบบทดสอบเป็นแบบอัตนัย

3. การเก็บและรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบทดสอบทางคณิตศาสตร์ภายหลังจากที่นักศึกษาได้เรียนเนื้อหาการพิสูจน์ข้อความในรูป $p \rightarrow q$ แล้ว มาทำการวิเคราะห์ผล โดยโจทย์การพิสูจน์ข้อความดังกล่าวมีลักษณะดังนี้

ข้อ 1 “ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนเต็มคู่” โดยให้ทำการพิสูจน์ด้วยวิธีตรง

ข้อ 2 “ถ้า a^3 เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคี่” ให้ทำการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่

ข้อ 3 “ถ้า $2 + p$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว p เป็นจำนวนคี่” ให้ทำการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งโดยวิเคราะห์ผลจากการพิจารณาข้อผิดพลาดที่พบในชั้นต่างๆ ตามเกณฑ์การพิจารณา

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำผลจากการตอบแบบทดสอบทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับข้อความในรูป $p \rightarrow q$ ทั้ง 3 ข้อของนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง มาทำการวิเคราะห์ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้สถิติเชิงพรรณนา ซึ่งประกอบด้วย การแจกแจงความถี่ และการหาค่าร้อยละ เพื่อวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และใช้การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อค้นหาลักษณะข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ชั้นต่างๆ ที่กำหนดไว้ ดังนี้ **ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น** จะพิจารณาจากคำตอบที่เป็นการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

และรู้ว่าจะต้องแสดงการพิสูจน์อย่างไรถึงจะพิสูจน์ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ตามรูปแบบของการพิสูจน์นั้น

ขั้นที่ 2 ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ จะพิจารณาจากคำตอบในด้านของการใช้บทนิยาม หรือทฤษฎีบทในขั้นตอนการพิสูจน์ หรือการใช้กระบวนการแก้ปัญหาหรือเทคนิคต่างๆ การใช้ข้อเท็จจริง หรือสิ่งที่เรารู้มาแล้ว

ขั้นที่ 3 ขั้นการแสดงการพิสูจน์ จะพิจารณาจากการเขียนแสดงการพิสูจน์ เป็นขั้นตอนจนได้เป็นผลสำเร็จ การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ การใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล การระมัดระวัง ในการแสดงการเขียนพิสูจน์

ผลการวิจัย

นำเสนอผลการวิจัยโดยจำแนกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์จำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่างที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับข้อความในรูป $p \rightarrow q$ จำแนกตามวิธีการพิสูจน์โดยพิจารณาผลการทำแบบทดสอบ ถูกต้องทั้ง 3 ขั้นตอน ปรากฏผลดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับข้อความในรูป $p \rightarrow q$	จำนวน นักศึกษา (คน)	จำนวนนักศึกษาที่ ทำแบบทดสอบได้ (คน)	ร้อยละของจำนวน นักศึกษาที่ทำ แบบทดสอบได้
1. วิธีการพิสูจน์โดยทางตรง	60	27	45.00
2. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่	60	25	41.67
3. วิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง	60	17	28.33

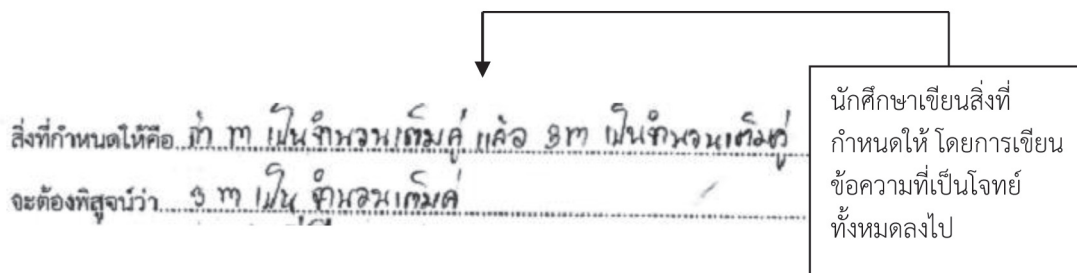
จากตารางที่ 1 พบว่า นักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับข้อความในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยวิธีการพิสูจน์โดยทางตรงมากที่สุด โดยมีนักศึกษาทำแบบทดสอบถูกต้อง จำนวน 27 คน คิดเป็นร้อยละ 45 ของจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง รองลงมา คือ ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มีนักศึกษาทำแบบทดสอบถูกต้อง จำนวน 25 คน คิดเป็นร้อยละ 41.67 และความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยการหาข้อขัดแย้ง มีนักศึกษาทำแบบทดสอบถูกต้อง จำนวน 17 คน คิดเป็นร้อยละ 28.33

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จำแนกตามข้อผิดพลาดที่พบในขั้นตอนการพิสูจน์ตามแต่ละวิธีการพิสูจน์ โดยข้อผิดพลาดที่พบในแต่ละขั้นตอนของวิธีการพิสูจน์ทางตรง ปรากฏผลดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดสำหรับวิธีการพิสูจน์ทางตรง

ลักษณะข้อผิดพลาด	จำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง (คน)	ร้อยละของจำนวนนักศึกษาที่ทำแบบทดสอบผิดพลาด
ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น	19	31.67
1. เขียนสิ่งที่กำหนดให้เกิน	(8)	(13.33)
2. เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ถูกต้อง	(6)	(10.00)
3. เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน	(4)	(6.67)
4. ไม่เขียนสิ่งที่กำหนดให้ แต่เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน	(1)	(1.67)
ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์	11	18.33
1. นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง	(9)	(15.00)
2. เขียนบทนิยามไม่ครบ หรือไม่อ้างบทนิยาม	(2)	(3.33)
ขั้นการแสดงการพิสูจน์	30	50.00
1. ขาดความระมัดระวังในการเขียนพิสูจน์	(9)	(15.00)
2. เขียนพิสูจน์ไม่สำเร็จ	(7)	(11.67)
3. เขียนพิสูจน์ลัดขั้นตอน	(5)	(8.33)
4. สรุปผิด	(5)	(8.33)
5. เขียนข้อความพิสูจน์ไม่ชัดเจน	(4)	(6.67)

จากตารางที่ 2 พบว่า ในการพิสูจน์ทางตรงมีลักษณะข้อผิดพลาดในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้นที่พบมากที่สุดคือ เขียนสิ่งที่กำหนดให้เกิน มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 8 คน คิดเป็นร้อยละ 13.33 รองลงมา คือ เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ถูกต้อง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 6 คน คิดเป็นร้อยละ 10 รองลงมา คือ เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 4 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67 และไม่เขียนสิ่งที่กำหนดให้ แต่เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 1 คน คิดเป็นร้อยละ 1.67 ตามลำดับ โดยข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้เกิน ดังตัวอย่างในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากที่สุดในการทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้นสำหรับการพิสูจน์ทางตรง

ลักษณะข้อผิดพลาดในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์ทางตรงที่พบมากที่สุด คือ การนำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 9 คน คิดเป็นร้อยละ 15 รองลงมา คือ เขียน บทนิยามไม่ครบหรือไม่อ้างบทนิยาม มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 2 คน คิดเป็นร้อยละ 3.33 โดยการนำ บทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง ดังตัวอย่างในภาพที่ 2

พิสูจน์ ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ข้อความ	เหตุ
1) m เป็นจำนวนเต็มคู่	เหตุ (สมมุติฐาน)
2) $m = 2k$, k เป็นจำนวนเต็ม บางจำนวน	บทนิยามจำนวนคู่ และข้อ 1
3) $3m = 6k$, k เป็นจำนวนเต็ม บางจำนวน	กฎพีทาโกรัส และข้อ 2
4) $3m$ เป็นจำนวนคู่	นิยามจำนวนคู่และข้อ 4
5) ดังนั้น ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนเต็มคู่	จาก 1 - 4

นักศึกษาเขียนสรุปสิ่งที่
ต้องพิสูจน์ โดยไม่เขียน
แสดงวิธีการพิสูจน์ที่
อธิบายให้เห็นว่า
สอดคล้องกับบทนิยาม
อย่างไร

ภาพที่ 2 ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากที่สุดในการค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์ทางตรง

ลักษณะข้อผิดพลาดในขั้นการแสดงผลการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์ทางตรงที่พบมากที่สุด คือ การขาดความระมัดระวังในการพิสูจน์ มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 9 คน คิดเป็นร้อยละ 15.00 รองลงมา คือ เขียนพิสูจน์ไม่สำเร็จ มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 7 คน คิดเป็นร้อยละ 11.67 รองลงมา คือ เขียนพิสูจน์ลัดขั้นตอนและสรุปผิด มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน คือ 5 คน คิดเป็นร้อยละ 8.33 และเขียนพิสูจน์ ไม่ชัดเจน มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 4 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67 ตามลำดับ โดยการขาดความระมัดระวัง ในการพิสูจน์ ดังตัวอย่างในภาพที่ 3

ข้อผิดพลาด	เหตุผล
1. m เป็นจำนวนเต็มคู่ ✓	ตน m (สมมุติฐาน)
2. $m = 2n$ n เป็นจ.เต็มบวกจ. ✓	บทนิยามของ n ค่า n ข้อ 1
3. $3m = 2n$ n เป็นจ.เต็มบวกจ. ✓	สมมุติฐานที่ n ข้อ 2
4. $3m = 2n$ n เป็นจ.เต็มบวกจ. ✓	กฎการแจกแจง
5. $3m$ เป็นจำนวนคู่	กฎการปิด
6. อันนั้น ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนเต็มคู่	บทนิยามข้อ 1 คำนวณข้อ 4 ข้อ 1-5

นักศึกษาเขียน
การพิสูจน์ไม่
ระมัดระวัง โดยเขียน
ค่า m ตามบทนิยาม
แต่แสดงค่าของ $3m$
ไม่ถูกต้อง

ภาพที่ 3 ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากที่สุดในการแสดงการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์ทางตรง

ผลการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำแนกตามข้อผิดพลาดที่พบในขั้นตอนการพิสูจน์ โดยข้อผิดพลาดที่พบในแต่ละขั้นตอนของวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ปรากฏผลดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาด	จำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง (คน)	ร้อยละของจำนวนนักศึกษาที่ทำแบบทดสอบผิดพลาด
ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น	19	31.67
1. เขียนการพิสูจน์ไม่ถูกต้องตามวิธีที่กำหนดให้	(13)	(21.67)
2. เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยไม่มีสิ่งสมมติหรือไม่มีการอ้างอิง	(6)	(10.00)
ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์	5	8.33
1. นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง	(4)	(6.67)
2. เขียนบทนิยามไม่ครบหรือไม่อ้างบทนิยาม	(1)	(1.66)
ขั้นการแสดงการพิสูจน์	29	48.33
1. ไม่ระมัดระวังในการเขียนแสดงการพิสูจน์	(15)	(25.00)
2. สับสนในรูปแบบการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่กับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	(6)	(10.00)
3. นำบทนิยามมาใช้ในการสรุปไม่เหมาะสม	(4)	(6.67)
4. เขียนแสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน	(2)	(3.33)
5. เขียนสรุปไม่เป็นขั้นตอน	(1)	(1.66)
6. ไม่สรุปบทพิสูจน์	(1)	(1.66)

จากตารางที่ 3 พบว่า ในการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่มีลักษณะข้อผิดพลาดขั้นทำความเข้าใจ โจทย์เบื้องต้นที่พบมากที่สุด คือ เขียนการพิสูจน์ไม่ถูกต้องตามวิธีที่กำหนดให้ มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 13 คน คิดเป็นร้อยละ 21.67 รองลงมา คือ เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยไม่มีสิ่งสมมติหรือไม่มีการอ้างอิง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 6 คน คิดเป็นร้อยละ 10 โดยการเขียนการพิสูจน์ไม่ถูกต้องตามวิธีที่กำหนดให้ ดังตัวอย่างในภาพที่ 4

พิสูจน์	ข้อผิดพลาด	หมายเหตุ
1) 3^3 เป็นจำนวนเต็ม ดี	เลข (สัทพจน์ที่ 1)	นักศึกษาแสดง การพิสูจน์ด้วย การพิสูจน์ทางตรง
2) $3^3 = 3 \times 3 + 1, 3$ เป็นจำนวนเต็ม พอจำนวน	บทนิยามของจำนวนเต็ม ดี และ ข้อ 1	
3) $3 = 3 \times 3 + 1, 3$ เป็นจำนวนเต็ม พอจำนวน	สมบัติการเท่า และ ข้อ 2	
4) 3 เป็นจำนวนเต็ม ดี	บทนิยามของจำนวนเต็ม ดี และ ข้อ 3	
5) อธิบายว่า 3^3 เป็นจำนวนเต็ม ดี ... 3 เป็นจำนวนเต็ม ดี	สัจพจน์ที่ 1 และ ข้อ 4	

ภาพที่ 4 ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากที่สุดในขั้นตอนทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น
สำหรับการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาดในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์สำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ที่พบมากที่สุด คือ นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 4 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67 รองลงมา คือ เขียนบทนิยามไม่ครบหรือไม่อ้างบทนิยาม มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 1 คน คิดเป็นร้อยละ 1.66 โดยการนำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้องที่มีข้อผิดพลาดมากที่สุด มีนักศึกษาเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อให้สอดคล้องกับนิยามของจำนวนคู่ไม่ถูกต้อง ดังตัวอย่างในภาพที่ 5

พิสูจน์ ข้อความข้างรับ ที่จริงประมณนี้ "ถ้า a ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a^2 ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่"

- ข้อความ
- 1) a เป็นจำนวนเต็มคู่
 - 2) $a = 2k$, k เป็นจำนวนเต็มบวก
 - 3) $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$, k เป็นจำนวนเต็มบวก
 - 4) $a^2 = 4k^2$, $2k^2$ เป็นจำนวนเต็มบวก
 - 5) a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่
 - 6) a^2 ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่
- หมายเหตุ
- แต่ (สมมติฐาน)
บทนิยามของจำนวนคู่ และ ข้อ 1
สมบัติการเท่ากัน และ ข้อ 2
กฎการแจกแจง และ กฎการปิด และ ข้อ 3
บทนิยามจำนวนเต็มคู่
สัจพจน์ที่ 1 และ ข้อ 5

นักศึกษาเขียนสัญลักษณ์ทาง
คณิตศาสตร์เพื่อให้สอดคล้องกับ
นิยามของจำนวนคู่ไม่ถูกต้อง

ภาพที่ 5 ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากที่สุดในการค้นหาคำเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์
สำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
ที่พบมากที่สุดคือ ไม่ระมัดระวังในการเขียนแสดงการพิสูจน์ มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 15 คน
คิดเป็นร้อยละ 25 รองลงมา คือ สับสนในรูปแบบการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่กับการพิสูจน์โดยใช้
ข้อขัดแย้ง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 6 คน คิดเป็นร้อยละ 10 รองลงมา คือ นำบทนิยามมาใช้
ในการสรุปไม่เหมาะสม มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 4 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67 รองลงมา
คือ เขียนแสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 2 คน คิดเป็นร้อยละ 3.33
เขียนสรุปไม่เป็นขั้นตอนและไม่สรุปบทพิสูจน์ มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน คือ 1 คน
คิดเป็นร้อยละ 1.66 ตามลำดับ โดยที่การไม่ระมัดระวังในการเขียนแสดงการพิสูจน์ที่มีความผิดพลาด
มากที่สุด ดังตัวอย่างในภาพที่ 6

พิสูจน์

- 1) a ไม่เป็นจำนวนคู่
- 2) a เป็นจำนวนคู่
- 3) $a = 2k$, k เป็นจำนวนเต็มบวก
- 4) $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$, k เป็นจำนวนเต็มบวก
- 5) $a^2 = 4k^2$, $2k^2$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- 6) a^2 ไม่เป็นจำนวนคู่

หมายเหตุ (สมมติฐาน)
บทนิยามของจำนวนคู่ และ ข้อ 1
สมบัติการเท่ากัน และ ข้อ 2
กฎการแจกแจง และ กฎการปิด และ ข้อ 3
บทนิยามจำนวนเต็มคู่
สัจพจน์ที่ 1 และ ข้อ 5

นักศึกษาไม่
ระมัดระวังใน
การเขียนแสดง
การพิสูจน์

ภาพที่ 6 ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากที่สุดในการแสดงการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์
โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ผลการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จำแนกตามข้อผิดพลาดที่พบในขั้นตอนการพิสูจน์ โดยข้อผิดพลาดที่พบในแต่ละขั้นตอนของวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ปรากฏผลดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

ลักษณะข้อผิดพลาด	จำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง (คน)	ร้อยละของจำนวนนักศึกษาที่ทำ แบบทดสอบผิดพลาด
ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น	25	41.67
1. ไม่เขียนพิสูจน์	(11)	(18.33)
2. เขียนการพิสูจน์เป็นวิธีแย้งสลับที่	(8)	(13.33)
3. ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความ p	(6)	(10.00)
ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์	39	65.00
1. ไม่เข้าใจวิธีการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	(34)	(56.67)
2. เขียนนิเสธของข้อความไม่ถูกต้อง	(3)	(5.00)
3. เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง	(2)	(3.33)
ขั้นการแสดงผลการพิสูจน์	11	18.33
1. เขียนแสดงไม่ระมัดระวัง	(8)	(13.33)
2. ไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	(1)	(1.67)
3. เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ได้ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้	(1)	(1.67)
4. เขียนสรุปไม่ชัดเจน	(1)	(1.67)

จากตารางที่ 4 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้นในการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ที่พบมากที่สุด คือ ไม่เขียนพิสูจน์ มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 11 คน คิดเป็นร้อยละ 18.33 รองลงมา คือ เขียนการพิสูจน์เป็นวิธีแย้งสลับที่ มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 8 คน คิดเป็นร้อยละ 13.33 และไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความ p มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 6 คน คิดเป็นร้อยละ 10 ตามลำดับ

ลักษณะข้อผิดพลาดขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งที่พบมากที่สุด คือ การไม่เข้าใจวิธีการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 56.67 รองลงมา คือ เขียนนิเสธของข้อความไม่ถูกต้อง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 3 คนคิดเป็นร้อยละ 5 และเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 2 คน คิดเป็นร้อยละ 3.33 ตามลำดับ โดยการไม่เข้าใจวิธีการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งที่พบว่าเป็นปัญหามากที่สุด ดังตัวอย่างในภาพที่ 7

พิสูจน์

- 1) ถ้า $2+p$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว p เป็นจำนวนคี่
- 2) ถ้า $2+p$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว p ไม่เป็นจำนวนคี่
- 3) ถ้า $2+p$ เป็นจำนวนคี่
- 4) p ไม่เป็นจำนวนคี่
- 5) p เป็นจำนวนคี่
- 6) $p = 2n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก
- 7) $2+p = 2+2n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก
- 8) $2+p = 2(1+n)$, $(1+n)$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- 9) $2+p$ เป็นจำนวนคี่

สรุป: พจน์ที่ 1 ของการพิสูจน์
ถ้าสมมติให้ข้อความที่ 1 เป็นเท็จ
กฎการตัด 2
กฎการข้อ 2
สัจพจน์ที่ 1 และ ข้อ 4
บทนิยามของ คี่ และ ข้อ 5
สมบัติการเท่ากัน และ ข้อ 6
กฎการแจกแจง และ กฎการข้อ 1 และ ข้อ 7
ทฤษฎีบทนิยาม ว่าจำนวนคี่ และ ข้อ 8

นักศึกษาเปลี่ยนข้อความในข้อ 1) ให้เป็น
ข้อขัดแย้งไม่ถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์

ภาพที่ 7 ลักษณะข้อผิดพลาดในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

ลักษณะข้อผิดพลาดในขั้นการแสดงการพิสูจน์สำหรับการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งที่พบมากที่สุด คือ การเขียนแสดงการพิสูจน์ไม่ระมัดระวัง มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 8 คน คิดเป็นร้อยละ 13.33 รองลงมา คือ ไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง การเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ได้ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ และเขียนสรุปไม่ชัดเจน มีจำนวนนักศึกษาที่เป็นกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน คือ 1 คน คิดเป็นร้อยละ 1.67 โดยการเขียนแสดงการพิสูจน์ไม่ระมัดระวัง มีตัวอย่างดังภาพที่ 8

พิสูจน์

- 1) $2+p$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว p เป็นจำนวนคี่
- 2) $2+p$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว p ไม่เป็นจำนวนคี่
- 3) $2+p$ เป็นจำนวนคี่
- 4) p เป็นจำนวนคี่
- 5) $p = 2n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก
- 6) $p+2 = 2n+2 = 2(n+1)$ โดย $n+1$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- 7) $2+p$ เป็นจำนวนคี่

สรุป: พจน์ที่ 1 ของการพิสูจน์
ถ้าสมมติให้ข้อความที่ 1 เป็นเท็จ
กฎการตัด 2
กฎการข้อ 2
สัจพจน์ที่ 1 และ ข้อ 4
บทนิยามของ คี่ และ ข้อ 5
สมบัติการเท่ากัน และ ข้อ 6
กฎการแจกแจง และ กฎการข้อ 1 และ ข้อ 7
ทฤษฎีบทนิยาม ว่าจำนวนคี่ และ ข้อ 8

นักศึกษาเขียนแสดงการพิสูจน์ไม่ระมัดระวัง

ภาพที่ 8 ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากที่สุดในการแสดงการพิสูจน์สำหรับการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

อภิปรายผล

จากข้อมูลที่พบข้างต้นจะเห็นว่า นักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ โดยวิธีการพิสูจน์ทางตรงมากที่สุด รองลงมา คือ มีความสามารถในการพิสูจน์ด้วยวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่และวิธีการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Wannasathit (2011) โดยปัญหาขั้นที่พบว่าเป็นข้อผิดพลาดจากการพิสูจน์ที่พบมากที่สุดของวิธีการพิสูจน์ทางตรงและวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ได้แก่ ปัญหาในขั้นการแสดงการพิสูจน์ ซึ่งนักศึกษามีปัญหาของการขาดความระมัดระวังในการเขียนพิสูจน์ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Sukkrom & Maqkanong (2015) ในขณะที่ลักษณะข้อผิดพลาดที่พบมากในวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ได้แก่ ขั้นการค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งเกิดจากความไม่เข้าใจในวิธีการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ซึ่งสอดคล้องกับงานของ William Horace Morgan (cited in Morgan, 1972) ด้วยสาเหตุดังกล่าวจึงทำให้วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งมีปัญหามากที่สุด โดยที่นักศึกษาที่มีปัญหาในการพิสูจน์ขั้นนี้จะเขียนตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ของข้อความที่เป็นข้อความแย้งสลับที่กับข้อความ “ถ้า...แล้ว...” เป็นข้อความ “ถ้า...และ...” หรือข้อความ “...แล้ว...” แทนข้อความที่ถูกต้องคือ “...และไม่...” ซึ่งอาจมีสาเหตุจากหลายปัจจัย เช่น ความรู้เบื้องต้นในเรื่องตรรกศาสตร์ซึ่งนักศึกษาได้เรียนมาก่อนหน้านี้ ความไม่รอบคอบในการตรวจสอบความถูกต้อง เป็นต้น

ข้อเสนอแนะ

1. ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาสำคัญที่ยังคงพบในการเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ดังนั้นนักศึกษาจึงควรให้ความสำคัญและหมั่นฝึกฝนการพิสูจน์ด้วยตนเองอย่างสม่ำเสมอ เพื่อให้เกิดความคุ้นชินกับการเขียนการพิสูจน์
2. ในการจัดการเรียนการสอนวิชาขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรใช้ปัญหาที่ค้นพบจากการพิสูจน์มาเป็นประโยชน์ในการจัดกระบวนการจัดการเรียนการสอนในเรื่องตรรกศาสตร์ ข้อความที่สมมูล การใช้นิเสธ และการแปลความจากใจหายให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ เพื่อที่จะนำไปสู่การเริ่มต้นเขียนการพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น
3. ควรมีการศึกษาความสามารถและปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการพิสูจน์อื่นๆ เช่น วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) เป็นต้น

References

- กาญจนา สนธิโพธิ์. (2527). *การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน* (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารธุรกิจ). กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ขจรศรี วรรณสถิตย์. (2544). *ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี* (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารธุรกิจ). กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ประเสริฐ เสียงดี. (2557). *การศึกษาปรัชญาทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์* (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารธุรกิจ). เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- พรทิพย์ เดชพิชัย จิราภรณ์ พงษ์โสภา ญัฐกฤตา สุวรรณทิพย์ และสิริวัลย์ เรืองช่วย ผู้ประภาย. (2559). การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบสองภาษาในโรงเรียนเขตกรุงเทพมหานคร. *วารสารมสด สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์*, 12(2), 59-80.
- พรธิดา สุขกรม และอัมพร ม้าคะนอง. (2558). การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา มัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2. *OJED*, 10(4), 599-611.
- พิชการ แปลงประสพโชค. (2518). *การศึกษามโนทัศน์เกี่ยวกับการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น* (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารธุรกิจ). กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สุวัฒนา อุทัยรัตน์. (2539). *การนำเสนอรูปแบบการพัฒนากำลังคนด้านการศึกษาคณิตศาสตร์* (รายงานผลการวิจัย). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อรรถศาสตร์ นิมิตรพันธ์. (2559). *การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในขั้นตอนวิธีการหารยาวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิตละอออุทิศ มหาวิทยาลัยสวนดุสิต*. *วารสารมสด สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์*, 12(2), 175-187.
- Moore, R.C. (1990). *College Students' Difficulties in Learning to Do Mathematical Proofs* (Doctoral dissertation). United States of America: University of Georgia.
- Morgan, W.H. (1972). *A Study of the Ability of College Mathematics Student in Proof Related Logic*. (Doctoral dissertation). United States of America: University of Georgia.

Saeed, R.M. (1997). *An Exploratory Study of College Students' Understanding of Mathematical Proof and the Relationship of this Understanding to their Attitude toward Mathematics*. Retrieved August 1, 2014, from <http://phdtree.org/pdf/25014497-an-exploratory-study-of-college-students-understanding-of-mathematical-proof-and-the-relationship-of-this-understanding-to-their-attitude-tow/>

Translated Thai References

Dechpichai, P., Pongsopa, J., Suwannateep, N. & Tuprakay, S.R. (2016). The Bilingual Mathematics Learning and Teaching Management in Schools in Bangkok. *SDU Research Journal Humanities and Social Sciences*, 12(2), 59-80. (in Thai)

Nimitpun, A. (2016). A Study of Mathematical Misconception about the Algorithm of Long Division among Prathomsuksa 4th Students of La-orutis Demonstration School, Suan Dusit University. *SDU Research Journal Humanities and Social Sciences*, 12(2), 175-187. (in Thai)

Siengdee, P. (1984). *A Study of Mathematical Philosophical and Mathematical Proof* (Master's thesis). Chiang Mai: Chiang Mai University. (in Thai)

Sonthipho K. (1984). *A Performance Study of Education that Focuses on an Analysis of the Thinking Process in Limit of Function* (Master's thesis). Bangkok: Srinakharinwirot University. (in Thai)

Sukkrom, P. & Mekanong, A. (2015). A Study of Misconceptions and Mistakes in Mathematics of Eleventh Grade Students in Schools Under the Secondary Educational Service Area Office 1 and 2. *OJED*, 10(4), 599-611. (in Thai)

Plangprasopchok, P. (1975). *A Study of Students' Achievement in Mathematical Structures of Lower Secondary Student* (Master's thesis). Bangkok: Srinakharinwirot University. (in Thai)

Uthairath, S. (1996). *A Proposed Model of Manpower Development for Mathematics Education* (Research Report). Bangkok: Chulalongkorn University. (in Thai)

Wannasathit, K. (2001). *University Mathematics Students' Problem in Mathematical Proof* (Master's thesis). Bangkok: Srinakharinwirot University. (in Thai)

ผู้เขียน

ดร.ธนพรรัช พฤษะวัน

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต

228-228/1-3 ถนนสีรินธร แขวงบางพลัด เขตบางพลัด กรุงเทพมหานคร 10700

e-mail: tanabrik@gmail.com

