

การพัฒนาความเป็นทั่วไปของปริพันธ์แบบรีมันน์ บนฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขต

Developing a Generalization of Riemann Integral on Unbounded Functions

บุญรัก ลาดสูงเนิน*

บทคัดย่อ

การศึกษานี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาปริพันธ์ที่มีความเป็นทั่วไปของปริพันธ์แบบรีมันน์ โดยศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันค่าจริงที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงปิดใด ๆ แล้วอาศัยคุณสมบัติของจี - ฟังก์ชันข้างบน และ จี - ฟังก์ชันข้างล่างของฟังก์ชันค่าจริงดังกล่าว ผลของการพัฒนาพบว่า จี - ปริพันธ์มีความเป็นทั่วไป หรือเป็นการขยายปริพันธ์แบบรีมันน์ กล่าวคือทุกฟังก์ชันที่หาปริพันธ์แบบรีมันน์ได้แล้ว จะสามารถหา จี - ปริพันธ์ได้เสมอ ในขณะที่บทกลับไม่จริง

คำสำคัญ : จี - ฟังก์ชันข้างบน จี - ฟังก์ชันข้างล่าง และจี - ปริพันธ์

Abstract

The purpose of this research was to develop a generalization of Riemann integral based on a comparison of unbounded functions with real value function in any close interval and in relation to the upper g - functions and lower g - functions properties.

The finding revealed that the Riemann integral is generalized. It can also be expanded. In other words, every functions that can be calculated for Riemann integral can also apply to g - integral, but the converse was not true.

Keywords : upper g - functions, lower g - functions and g - integral

* อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ
หมู่บ้านจอมบึง

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การหาปริพันธ์ (Integration) นับว่ามีบทบาทความสำคัญในวิชาแคลคูลัส หรือที่เรียกว่าแคลคูลัสปริพันธ์ (Integral Calculus) ตลอดจนการประยุกต์ในศาสตร์อื่น ๆ อย่างกว้างขวาง เช่น เศรษฐศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ธุรกิจ สังคมศาสตร์ ฯลฯ โดยเฉพาะอย่างยิ่งปริพันธ์จำกัดเขต (Definite Integral) ซึ่งได้มีนักคณิตศาสตร์ได้ให้ความสนใจในบทนิยามของปริพันธ์มาโดยตลอดตั้งแต่ต้นศตวรรษที่ 17 โดยไอแซค นิวตัน และ กอตต์เฟรด เลบ์นิซ (Issac Newton and Gottfried Leibniz) แต่บทนิยามที่ได้รับการยอมรับมากที่สุดจนถึงปัจจุบันได้แก่ บทนิยามของรีมันน์ (Riemann) หรือที่เรียกว่า ปริพันธ์แบบรีมันน์ (Riemann Integral) ซึ่งรีมันน์ได้อาศัยนิยามของผลรวมโคชี (Cauchy Sum) มาพิจารณาในประเด็นที่ว่า เมื่อใดฟังก์ชันจะหาปริพันธ์ได้ โดยพิจารณาจากผลรวมโคชี

$$\text{ซึ่งได้แก่ } \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

จากประเด็นคำถามดังกล่าว ซึ่งถือเป็นการถามว่าเมื่อใดผลรวมของ โคชีจะลู่เข้าแน่นอน ถ้าลู่เข้าหมายถึงฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้ และในที่สุดรีมันน์ก็ได้ให้นิยามปริพันธ์แบบรีมันน์ ดังที่ใช้ในปัจจุบัน ซึ่งมีนิยามดังนี้

กำหนด f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของช่วงปิด $[a, b]$ แล้วปริพันธ์จำกัดเขตของ f บนช่วงปิด $[a, b]$ คือ จำนวนจริงซึ่งเป็นค่าลิมิตของผลบวกรีมันน์ของ f สำหรับผลแบ่งกั้น P เมื่อ n มีค่าเข้าสู่อินฟินิตี้ เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$

$$\text{นั่นคือ } \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

$$\text{โดยที่ } t_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ และ } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\text{ทุก } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ เมื่อลิมิตนั้นหาค่าได้}$$

เรียก $f(x)$ ว่า ปริพัทธ์ (integrand) และกล่าวว่า f หาปริพันธ์ได้ (f is integrable) บนช่วงปิด $[a, b]$ เรียก a ว่า ขีดจำกัดล่าง (lower limit) และเรียก b ว่า ขีดจำกัดบน (upper limit)

ถึงแม้ว่าปริพันธ์แบบรีมันน์จะเป็นที่ยอมรับก็ตามแต่ก็ยังมีความจำกัดที่เข้มงวด โดยเฉพาะการมีขอบเขตของฟังก์ชันบนช่วงปิด ถือว่าเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นจะต้องมี ซึ่งพิจารณาได้จากทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสได้ดังนี้

$$\text{ถ้า } f \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด } [a, b] \text{ และ } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \dots (*)$$

$$\text{เมื่อ } F \text{ เป็นฟังก์ชันซึ่ง } F'(x) = f(x) \text{ สำหรับ } x \in (a, b)$$

แต่ในความเป็นจริงแล้ว ปริพันธ์ของ f บนช่วงปิด $[a, b]$ ตามทฤษฎีบทหลักมูลนั้นอาจจะไม่มีปริพันธ์หรือหาค่าปริพันธ์ไม่ได้ ดังตัวอย่าง (บุญรัก ลาดสูงเนิน, 2549 : 239)

$$\text{กำหนด } F(x) = \begin{cases} t^2 \cos(\frac{\pi}{t^2}) & ; 0 < t \leq 1 \\ 0 & ; t = 0 \end{cases}$$

$$\text{จะได้ } F'(x) = \begin{cases} 2t \cos(\frac{\pi}{t^2}) + (\frac{2\pi}{t}) \sin(\frac{\pi}{t^2}) & ; 0 < t \leq 1 \\ 0 & ; t = 0 \end{cases}$$

จะพบว่า F' ไม่สามารถหาปริพันธ์แบบรีมันน์ได้ เนื่องจากไม่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[0, 1]$ ดังนั้นสูตร (*) จึงใช้ไม่ได้กับฟังก์ชัน F' ข้างต้น
ดังนั้นเพื่อให้ปริพันธ์มีความครอบคลุมข้อจำกัดดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ที่จะพัฒนาปริพันธ์อีกรูปแบบหนึ่งให้มีความครอบคลุมปริพันธ์แบบรีมันน์ กล่าวคือ ปริพันธ์ที่พัฒนาขึ้นนั้น ยังคงเป็นจริงในปริพันธ์แบบรีมันน์

วัตถุประสงค์

เพื่อพัฒนาปริพันธ์ที่มีความเป็นทั่วไปของปริพันธ์แบบรีมันน์

ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาพฤติกรรมของฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตและไม่มีขอบเขตบนช่วงปิดใด ๆ

นิยามศัพท์

- กำหนด $f: R \rightarrow R$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า $R_f \subseteq R$
- สำหรับ $a, b \in R$ ซึ่ง $a < b$ แทนช่วงปิดของ a และ b ด้วย $[a, b]$ โดย $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$
- ฟังก์ชันค่าจริง f ต่อเนื่องที่จุด $x = c$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $|x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(c)| < \epsilon$
- ฟังก์ชันค่าจริง f มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้ามี $M > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| \leq M$ สำหรับ $x \in [a, b]$ ถ้าไม่มี $M > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| \leq M$ จะกล่าวว่าฟังก์ชันค่าจริง f ไม่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$

วิธีดำเนินการวิจัย

เนื่องจากในส่วนนี้เป็นการพัฒนาปริพันธ์โดยจะศึกษาจากฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดใด ๆ ทั้งมีขอบเขตและไม่มีขอบเขต ถ้าปริพันธ์ที่พัฒนาขึ้น เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติดังกล่าวก็เป็นการกล่าวได้ว่ามีความครอบคลุมหรือเป็นการขยายปริพันธ์แบบรีมันน์นั่นเอง ดังนี้

บทนิยาม 1 กำหนด f เป็นฟังก์ชันค่าจริง จะกล่าวว่า f มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้ามีจำนวนจริง $M > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| \leq M ; x \in [a, b]$

บทนิยาม 2 กำหนด f และ u_g เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ จะกล่าวว่า u_g เป็นจี-ฟังก์ชันข้างบนของ f (upper g-function of f) บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

- $u_g(a) = 0$
- u_g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$
- $u'_g(x) \geq f(x), \forall x \in (a, b)$ ยกเว้นบางจุดซึ่งมีจำนวนจำกัด

บทนิยาม 3 กำหนด f และ l_g เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ จะกล่าวว่า l_g เป็นจี-ฟังก์ชันข้างล่างของ f (lower g-function of f) บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

- $l_g(a) = 0$
- l_g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$
- $l'_g(x) \leq f(x), \forall x \in (a, b)$ ยกเว้นบางจุดซึ่งมีจำนวนจำกัด

ทฤษฎีบท 1 กำหนด $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ และ f มีขอบเขตบน $[a, b]$ แล้ว f จะมีฟังก์ชัน u_g และ l_g

พิสูจน์ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกันของ $[a, b]$ โดยที่ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

ให้ $u_g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$u_g(x) = \begin{cases} M_1 x + c_1 & ; a \leq x \leq x_1 \\ M_2 x + c_2 & ; x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \\ M_n x + c_n & ; x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

โดยที่ $M_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$
 $\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$

และ $\forall c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ ที่ทำให้ $u_g(a) = 0$ และ u_g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

ต่อไปจะแสดงว่า $u'_g(x) \geq f(x)$

ให้ p เป็นจุดลิมิตของ $[x_{k-1}, x_k] \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$ และ $p \in (x_{k-1}, x_k)$

ดังนั้นสำหรับ $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ที่ $x \neq p$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } u'_g(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{u_g(x) - u_g(p)}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{(M_k x + c_k) - (M_k p + c_k)}{x - p} \\ &= M_k ; \forall p \in (x_{k-1}, x_k) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $M_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$

ดังนั้น $u'_g(x) \geq f(x) \forall x \in (a, b)$... (1)

ให้ $l_g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$l_g(x) = \begin{cases} m_1 x + d_1 & ; a \leq x \leq x_1 \\ m_2 x + d_2 & ; x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \\ m_n x + d_n & ; x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

โดยที่ $m_k = \inf \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$

และ $d_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ ที่ทำให้ $l_g(a) = 0$ และ l_g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

และสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับ u_g และทำให้ได้ว่า

$$l'_g(x) \leq f(x) \forall x \in (a, b) \quad \dots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า u_g และ l_g เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนและจี - ฟังก์ชันข้างล่างของ f บน $[a, b]$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2 กำหนด f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ และ u_g, l_g เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนและจี - ฟังก์ชันข้างล่างของ f บน $[a, b]$ แล้ว $u_g(b) \geq l_g(b)$

พิสูจน์ให้ $d(x) = u_g(x) - l_g(x)$

ดังนั้น $d'(x) = u'_g(x) - l'_g(x)$

จากทฤษฎีบทที่ 3.2.1 จะได้ว่า $l'_g(x) \leq f(x) \leq u'_g(x) \forall x \in (a, b)$

นั่นคือ $0 \leq u'_g(x) - l'_g(x) = d'(x)$

จึงทำให้ได้ว่า d เป็นฟังก์ชันเพิ่มและต่อเนื่องบน $[a, b]$

ดังนั้น $d(b) \geq d(a)$

เนื่องจาก $d(a) = 0$ ดังนั้น $d(b) \geq 0$

นั่นคือ $u_g(b) - l_g(b) \geq 0$

$$u_g(b) \geq l_g(b) \quad \#$$

บทนิยาม 4 กำหนด f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ และ u_g, l_g เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนและจี - ฟังก์ชัน

ข้างล่างของ f บน $[a, b]$ แล้ว

ให้ $S = \{u_g(b) : u_g \text{ เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนของ } f \text{ บน } [a, b]\}$

$T = \{l_g(b) : l_g \text{ เป็นจี - ฟังก์ชันข้างล่างของ } f \text{ บน } [a, b]\}$

เรียก $\inf S$ ว่าจี - ปริพันธ์ข้างบน (upper g-integral) ของ f เขียนแทนด้วย $g \int_a^b f(x) dx$

เรียก $\sup T$ ว่าจี - ปริพันธ์ข้างล่าง (lower g-integral) ของ f เขียนแทนด้วย $g \int_a^b f(x) dx$

ทฤษฎีบท 3 กำหนด f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ และ u_g, l_g เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนและ

จี - ฟังก์ชันข้างล่างของ f บน $[a, b]$ แล้ว $g \int_a^b f(x) dx \leq g \int_a^b f(x) dx$

พิสูจน์ เนื่องจาก $u_g(b) \geq l_g(b)$ (จากทฤษฎีบท 2)

ดังนั้นจากบทนิยาม 2 จะได้ว่า $l_g(b)$ เป็นขอบเขตล่างของ S

นั่นคือ $l_g(b) \leq \inf S \leq g \int_a^b f(x) dx \quad \dots (*)$

และจากจากบทนิยาม 4 จะได้ว่า $g \int_a^b f(x) dx$ เป็นขอบเขตบนของ T

นั่นคือ $\sup T \leq g \int_a^b f(x) dx$ จึงได้ว่า

$$g \int_a^b f(x) dx \leq g \int_a^b f(x) dx \quad \#$$

บทนิยาม 5 กำหนด $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหา

จี - ปริพันธ์ได้ (g - integral) บน $[a, b]$ ถ้า $g \int_a^b f(x)dx = g \int_a^b f(x)dx$ แล้วเรียกค่ารวมกันนี้ว่า

จี - ปริพันธ์ (g - integral) เขียนแทนด้วย $g \int_a^b f(x)dx$ หรือ $f \in g[a, b]$

ทฤษฎีบท 4 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่ขอบเขตบน $[a, b]$ และหาปริพันธ์แบบบริมันน์ได้บน $[a, b]$ แล้ว f สามารถหาจี - ปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ และ $\int_a^b f(x)dx = g \int_a^b f(x)dx$

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่ขอบเขตบน $[a, b]$

ดังนั้น f มีจีฟังก์ชันข้างบนและจี - ฟังก์ชันข้างล่าง

ให้ $Q = \{u_g(b) : u_g \text{ เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนของ } f \text{ บน } [a, b]\}$

$R = \{l_g(b) : l_g \text{ เป็นจี - ฟังก์ชันข้างล่างของ } f \text{ บน } [a, b]\}$

เนื่องจาก f หาปริพันธ์แบบบริมันน์ได้บน $[a, b]$ ดังนั้น

$Q' = \{U(f, P) : P \text{ เป็นผลแบ่งกันของ } [a, b]\}$

$R' = \{L(f, P) : P \text{ เป็นผลแบ่งกันของ } [a, b]\}$

ให้ u_{g_1} เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนตัวหนึ่งของ f บน $[a, b]$

และ l_{g_1} เป็นจี - ฟังก์ชันข้างล่างตัวหนึ่งของ f บน $[a, b]$

นิยามเช่นเดียวกับทฤษฎีบท 1

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } u_{g_1}(b) - u_{g_1}(a) &= \sum_{k=1}^n [u_{g_1}(t_k) - u_{g_1}(t_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n u'_{g_1}(t_k)(t_k - t_{k-1}) ; \exists t \in [t_{k-1}, t_k] \\ &= \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1}) \\ &= U(f, P) \end{aligned}$$

เนื่องจาก u_{g_1} เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบน จึงได้ว่า $u_{g_1}(a) = 0$

$$\text{นั่นคือ } U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1}) = u_{g_1}(b)$$

จึงทำให้ $Q' \subseteq Q$ และผลที่ตามมาคือ

$$\inf Q \leq \inf Q' \quad \dots(1)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(t_k - t_{k-1}) = l_{g_1}(b)$$

และทำให้ได้ว่า $R' \subseteq R$ ดังนั้น

$$\sup R' \leq \sup R \quad \dots(2)$$

เนื่องจาก $g \int_a^b f(x)dx \leq g \int_a^b f(x)dx$ ดังนั้น

$$\sup R \leq \inf Q \quad \dots(3)$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า

$$\sup R' \leq \sup R \leq \inf Q \leq \inf Q'$$

นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx \leq g \int_a^b f(x)dx \leq g \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

เนื่องจาก f หาปริพันธ์แบบบริมันน์ได้บน $[a, b]$ ดังนั้น

$$g \int_a^b f(x)dx = g \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx = g \int_a^b f(x)dx$ #

ทฤษฎีบท 5 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) และ f มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว $f \in g[a, b]$ และ $g \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

พิสูจน์ ให้ $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$H(x) = f(x) - f(a)$$

จะพบว่า 1) $H(a) = 0$

2) H เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

3) $H'(x) = f'(x)$

ดังนั้น H เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบนและข้างล่างของ f

$$\text{จึงได้ว่า } H(b) \leq g \int_a^b f'(x)dx \leq g \int_a^b f'(x)dx \leq H(b)$$

$$\text{ดังนั้น } g \int_a^b f'(x)dx = g \int_a^b f'(x)dx = H(b)$$

$$\text{นั่นคือ } g \int_a^b f'(x)dx = H(b) = f(b) - f(a) \quad \#$$

ตัวอย่าง 1 กำหนด f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[-1, 1]$ นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์บน $(-1, 1)$

$$\text{โดย } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

จากทฤษฎีบท 3.2.5 จะได้ว่า $f' \in g[-1, 1]$

$$\text{และ } \int_{-1}^1 f'(x)dx = f(1) - f(-1) = 0 \quad \#$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า ฟังก์ชัน $f'(x)$ ไม่มีปริพันธ์แบบรีมันน์บน $[-1, 1]$ เนื่องจาก $f'(x)$ ไม่มีขอบเขตบน $[-1, 1]$ ซึ่งมี 0 รวมอยู่ด้วย

ตัวอย่าง 2 กำหนด $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & ; x \neq \pm 1 \\ 0 & ; x = \pm 1 \end{cases}$$

ให้ $u_g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$u_g(x) = \sqrt{1-x^2} ; \forall x \in [-1, 1]$$

จะพบว่า 1) $u_g(-1) = 0$

2) $u_g \in [-1, 1]$

3) $u'_g = f'(x) \forall x \in [-1, 1]$ ยกเว้นบางจุดใน $[-1, 1]$ ซึ่งมีจำนวนจำกัด

(คือ $-1, 1$)

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $\int_{-1}^1 f'(x)dx = u_g(1) - u_g(-1) = 0$ #

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 2 จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบน $[-1, 1]$ จึงไม่มีปริพันธ์แบบรีมันน์บน $[-1, 1]$ แต่ f ก็มี จี - ฟังก์ชันข้างบน (และข้างล่าง) จึงทำให้ $f \in g[-1, 1]$

ทฤษฎีบท 6 กำหนด $f \in g[a, b]$ และ u_g เป็นจี - ฟังก์ชันข้างบน ซึ่ง $u'_g = f(x)$;

$\forall x \in (a, b)$ แล้ว $g \int_a^b f(x)dx = u_g(b) - u_g(a)$

พิสูจน์ เป็นผลโดยตรงจากทฤษฎีบท 5

ทฤษฎีบท 7 กำหนด f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ แล้ว $f \in g[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจี - ฟังก์ชันข้างบน u_g และจี - ฟังก์ชันข้างล่าง l_g ของ f บน $[a, b]$ ซึ่ง $u_g(b) - l_g(b) < \varepsilon$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f \in g[a, b]$ ดังนั้น

$$g \int_a^b f(x)dx = g \int_a^b f(x)dx$$

เนื่องจาก $g \int_a^b f(x)dx = \sup\{l_g(b) : l_g \text{ เป็นจี - ฟังก์ชันข้างล่างของ } f \text{ บน } [a, b]\}$

ดังนั้น สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี l_{g_1} ของ f ซึ่ง

$$g \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < l_{g_1}(b) \quad \dots(1)$$

ทำนองเดียวกัน จะมี u_{g_1} ของ f ซึ่ง

$$g \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > u_{g_1}(b) \quad \dots(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$g \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < l_{g_1}(b) \leq u_{g_1}(b) < g \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

นั่นคือ $u_{g_1}(b) - l_{g_1}(b) < \varepsilon$

สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี u_g และ l_g ของ f ซึ่ง $u_{g_1}(b) - l_{g_1}(b) < \varepsilon$

$$\text{ดังนั้น } g \int_a^b f(x)dx - g \int_a^b f(x)dx < \varepsilon$$

$$\text{เนื่องจาก } g \int_a^b f(x)dx - g \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\text{ดังนั้น } g \int_a^b f(x)dx = g \int_a^b f(x)dx$$

นั่นคือ $f \in g[a, b]$ #

ทฤษฎีบท 8 กำหนด $f \in g[a, b]$ และสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $c_1, c_2 \in (a, b)$

$$\text{ซึ่ง } f(c_1) \leq \left(\frac{1}{b-a}\right) g \int_a^b f(x)dx \leq f(c_2) \text{ และ } |f(c_1) - f(c_2)| < \varepsilon$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f \in g[a, b]$ ดังนั้นจะมี u_g และ l_g ของ f ซึ่ง

$$l_g(b) - l_g(a) \leq g \int_a^b f(x)dx \leq u_g(b) - u_g(a)$$

$$\text{จะได้ว่า } l'_g(c_1)(b-a) \leq g \int_{b-a}^b f(x)dx \leq u'_g(c_2)(b-a)$$

$$\text{เนื่องจาก } l'_g(c_1)(b-a) \leq f(c_1)(b-a) \text{ และ } f(c_2)(b-a) \leq u'_g(c_2)(b-a)$$

$$\text{ดังนั้น } f(c_1)(b-a) \leq g \int_a^b f(x)dx \leq f(c_2)(b-a)$$

$$\text{นั่นคือจะมี } c_1, c_2 \in (a, b) \text{ ซึ่ง } f(c_1) \leq \left(\frac{1}{b-a}\right) g \int_a^b f(x)dx \leq f(c_2)$$

$$\text{เนื่องจาก } f(c_1)(b-a) \leq f(c_2)(b-a)$$

$$\text{ดังนั้น } 0 \leq |f(c_1) - f(c_2)| < \varepsilon ; \forall \varepsilon > 0 \quad \#$$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 8

1) ถ้าพิจารณากรณีที่ $u'_g(c_1) < f(c_1)$ และ $l'_g(c_2) > f(c_2)$, $\exists c_1, c_2 \in (a, b)$ ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็น

จริง

$$2) \text{ จาก } 0 \leq |f(c_1) - f(c_2)| < \varepsilon$$

จะได้ว่า $c_1 = c = c_2$ จะทำให้ได้ว่า $g \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ ซึ่งเรียกว่า ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย

สำหรับ จี - ปริพันธ์ (mean value theorem for g - integral)

ผลการวิจัย

จากการดำเนินการวิเคราะห์สาระที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์แบบรีมันน์จากวิธีดำเนินการวิจัย ที่ผ่านมาโดยเริ่มจากความรู้พื้นฐานที่สำคัญได้แก่ การมีขอบเขตและไม่มีขอบเขตของฟังก์ชัน ลิมิตและความต่อเนื่อง การหาอนุพันธ์ และการหาปริพันธ์แบบรีมันน์เป็นหัวข้อสุดท้ายและนำมาวิเคราะห์เพื่อพัฒนาปริพันธ์แบบใหม่ซึ่งเรียกว่า จี – ปริพันธ์ ซึ่งพบว่า

1. ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ และ f มีขอบเขตบน $[a, b]$ แล้วฟังก์ชัน f จะมี u_g และ l_g เสมอ
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์แบบรีมันน์ได้บน $[a, b]$ แล้ว $f \in g[a, b]$ และ

$$\int_a^b f(x)dx = g \int_a^b f(x)dx$$

3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บน (a, b) แล้ว $f' \in g[a, b]$

$$\text{และ } g \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

4. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบน $[a, b]$ และมี u_g และ l_g แล้ว $f \in g[a, b]$

5. ถ้า $f \in g[a, b]$ และมี u_g ซึ่ง $u_g'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$ แล้ว

$$g \int_a^b f(x)dx = u_g(b) - u_g(a)$$

6. ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ แล้ว $f \in g[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $\forall \varepsilon > 0$ จะมี u_g และ l_g บน $[a, b]$

$$\text{ซึ่ง } u_g(b) - l_g(b) < \varepsilon$$

นอกจากผลจากข้อ 1 – 6 แล้วยังมีคุณสมบัติต่างๆ ที่ตามมา เช่น คุณสมบัติค่าเฉลี่ยสำหรับ จี – ปริพันธ์ และอื่นๆ อีกที่ปริพันธ์แบบรีมันน์หาค่าได้แล้ว จี – ปริพันธ์ จะหาค่าได้เสมอ จึงเป็นการสรุปได้ว่า จี – ปริพันธ์ ที่พัฒนาขึ้นมีความเป็นทั่วไปกว่าปริพันธ์แบบรีมันน์ ซึ่งเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ทุกประการ

สรุปผล

จากจี – ปริพันธ์ที่ได้พัฒนาขึ้นมา จะพบว่ามีความเป็นทั่วไปมากกว่าปริพันธ์แบบรีมันน์ กล่าวคือทุกฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ แบบรีมันน์ได้ จะสามารถหาจี – ปริพันธ์ได้ด้วย ในขณะที่ฟังก์ชันหาจี – ปริพันธ์ได้อาจจะหาปริพันธ์แบบรีมันน์ไม่ได้ ดังตัวอย่างที่ได้แสดงไปแล้วข้างต้น คุณสมบัติของจี – ปริพันธ์ เช่น ค่าเฉลี่ย การเปลี่ยนตัวแปร การหาปริพันธ์ทีละส่วน และอื่นๆ ก็สามารถหาได้เช่นเดียวกับการหาปริพันธ์แบบรีมันน์ จะต่างกันตรงที่ฟังก์ชันที่หาจี – ปริพันธ์อาจจะเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตหรือไม่ก็ได้ ในขณะที่ฟังก์ชันที่หาปริพันธ์แบบรีมันน์ต้องมีขอบเขตบนช่วงปิดที่กำหนด

อภิปรายผล

จากการพัฒนาจี – ปริพันธ์ ทำให้ได้ปริพันธ์ที่มีความเป็นทั่วไปมากกว่าปริพันธ์แบบรีมันน์ ที่มีความสะดวก และง่ายต่อการทำความเข้าใจศึกษา เมื่อเทียบกับปริพันธ์ที่มีความสมบูรณ์ที่สุดอย่างปริพันธ์เลอเบก (Lebesgues Integral) และทำให้ได้คุณสมบัติที่สำคัญของจี – ปริพันธ์ คือ คุณสมบัติค่ามัชฌิม (Mean Value Theorem for g - Integral) นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติอื่น ๆ อีก ดังทฤษฎีที่นำเสนอในวิธีดำเนินการวิจัย และที่สำคัญได้คุณสมบัติการมีจี – ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงบนช่วงปิดใด ๆ ซึ่งถือว่าเป็นคุณสมบัติพื้นฐานหลักในการศึกษาคุณสมบัติอื่นต่อไป

ข้อเสนอแนะ

เนื่องจาก จี – ปริพันธ์ที่พัฒนาขึ้นมานั้น ได้แสดงถึงคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญในการมี จี – ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงบนช่วงปิดใด ๆ เท่านั้น ดังนั้นผู้สนใจศึกษาควรศึกษาคุณสมบัติต่อไปนี้ว่าจริงหรือไม่

1. คุณสมบัติพีชคณิตของฟังก์ชันที่หาจี – ปริพันธ์ได้
2. คุณสมบัติที่หาจี – ปริพันธ์โดยการแยกส่วน (by parts)
3. คุณสมบัติที่หาจี – ปริพันธ์แบบแทนค่า (substitution)
4. ศึกษาบนช่วงปิดที่เป็นเซตย่อยของ $\mathbf{R}^2$ และ $\mathbf{R}^3$ และบทประยุกต์

บรรณานุกรม

- บุญรัก ลาดสูงเนิน. (2549). การวิเคราะห์จริงเบื้องต้น. ราชบุรี : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีมหาวิทยาลัยราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง.
- เยาวลักษณ์ โยธฤทธิ. (2535). รีมันน์อินทิกรัลของฟังก์ชันต่อเนื่องเอปซิลอนบน $[0, 1]$. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- Bartle, Robert G. and Sherbert, Donald R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. 3rd ed. New York : John Wiley & son.
- Botsko, Michael W. (1986). An Easy Generalization of the Riemann Integral. *The American Mathematical*. (October) : 728-732
- Lu Bin. (1999). *General Riemann Integrals and their u Computation Via Domain*. Louisiana State University. : n.p.
- Mcleod, C. (1980). The Generalize Riemann Integral. *Mathematical Society America*. (20) : 275.