

การสร้างเทศะทางคณิตศาสตร์ในเรขาคณิตแบบยูคลิด

The Creation of Mathematical Space
in the Euclidean Geometry

ศุภวิทย์ ถาวรบุตร

บทคัดย่อ

เรขาคณิตแบบยูคลิดเป็นผลผลิตที่สืบเนื่องมาจากผลงานอันโด่งดังของ ยูคลิดแห่งอเล็กซานเดรีย ซึ่งได้แก่หนังสือชุด *Elements* ในผลงานชิ้นนี้ ยูคลิดสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ซึ่งภายหลังกลายเป็นองค์ประกอบหนึ่งที่สำคัญอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ นวัตกรรมของยูคลิด ทั้งนิยาม มूलบท และสัจพจน์ เมื่อนำมาใช้ร่วมกันได้นำไปสู่ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ก่อให้เกิดแนวทางการทำความเข้าใจกระบวนการนิรนัยทางคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพ และช่วยลำดับการอ้างเหตุผลแบบนิรนัยได้อย่างเป็นระบบ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ยังเพิ่มความแม่นยำในระดับอนันต์ซึ่งพ้นไปจากโลกกายภาพในยามที่มนุษย์ต้องกำหนดและพิสูจน์ทฤษฎีทางเรขาคณิต เพราะความเรียบง่ายในระบบคิดของยูคลิดช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถคิดถึงสมบัติต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ได้แจ่มชัด และลดโอกาสที่แต่ละคนจะเกิดความเข้าใจที่เบี่ยงเบนไปจากสิ่งที่ยูคลิดเสนอไว้ ดังนั้น เรขาคณิตแบบยูคลิดจึงเป็นหลักฐานอันโดดเด่นทางประวัติศาสตร์ภูมิปัญญาเพราะแสดงถึงความสามารถของมนุษย์กว่า 2,000 ปีล่วงมาแล้ว ในการจัดการกับความซับซ้อนของวิชาคณิตศาสตร์

Abstract

The Euclidean Geometry is a product derived from the famous book series of Euclid of Alexandria, the *Elements*. Within it, Euclid created the mathematical space which later became one of the most crucial parts in mathematics. Many inventions of Euclid, including definitions, postulates, and axioms, when they were combined together, produced the mathematical space which constituted the effective way to perceive the mathematical deduction process and to follow the deductive reasoning systematically. This mathematical space further increased the accuracy in infinite level, beyond the physical world, when people need to determine and prove the geometry theories because the simplicity in Euclid's system of thought allowed practitioners to think about mathematical properties in clear images and lessened the chance that their understanding might be deviated from what Euclid proposed. So, the Euclidean Geometry was a prominent evident in the intellectual history because it demonstrated the capability of man more than 2,000 years ago in dealing with complexities of mathematics.

บทนำ

...ไอน์สไตน์ครั้งหนึ่งก็เคยถูกถามคำถามนี้เหมือนกัน เขาตอบว่า การพัฒนาทางวิทยาศาสตร์ของชาวตะวันตกเกิดจากการค้นพบที่ยิ่งใหญ่สองประการอย่างแรกคือการสร้างระบบตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ซึ่งได้แก่เรขาคณิตของยุคลิด¹ โดยนักปรัชญาชาวกรีก และอย่างที่สองคือการค้นพบความเป็นไปได้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างสาเหตุและผล โดยการทดลองที่เป็นระบบในสมัยฟื้นฟูศิลปวิทยาการ...

(พิพัฒน์ พสุธารชาติ, 2544: 101)

สำหรับผู้สนใจประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์ เมื่อเอ่ยถึงนักคณิตศาสตร์ในสมัยกรีก มักจะต้องนึกถึงชื่อนักคณิตศาสตร์กรีกที่สำคัญ 2 คน คือ พีทาโกรัส (Pythagoras) และ ยุคลิด (Euclid) กรณีของพีทาโกรัสเป็นที่รู้จักในวงกว้าง เพราะทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก (Pythagorean Theorem) ของเขาเป็นสิ่งที่ผู้ซึ่งผ่านการเรียนคณิตศาสตร์ในระบบโรงเรียนย่อมเคยรู้จักกับทฤษฎีบทนี้มาบ้าง ไม่ว่าจะชอบหรือไม่ชอบคณิตศาสตร์ก็ตาม

ส่วนยุคลิดจัดว่ามีบทบาทสูงมากในการวางรากฐานให้วิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะผลงานของยุคลิดที่มีชื่อว่า *Elements* นั้น ถือว่ามีความสำคัญในฐานะตำราเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้งานมาอย่างยาวนานในประวัติศาสตร์ แม้จนถึงปัจจุบัน แนวทางการเรียนคณิตศาสตร์โดยเฉพาะเรขาคณิต (Geometry) ก็ยังคงต้องอาศัยระบบคิดแบบที่ยุคลิดเคยริเริ่มไว้ ด้วยมรดกทางภูมิปัญญาที่ทรงอิทธิพลถึงเพียงนี้ คำถามที่น่าสนใจข้อหนึ่งคือ เหตุใดคนทั่วไปจึงไม่ค่อยทราบว่าผลงานของยุคลิดคืออะไร โดยเฉพาะเมื่อเทียบกับทฤษฎีบทของพีทาโกรัสซึ่งมีอายุเก่าแก่ว่านานของยุคลิดเสียด้วยซ้ำ

คำตอบในเบื้องต้นคือ การเรียนการสอนเรขาคณิตใช้มรดกทางความคิดของยุคลิดก็จริง แต่เป็นการนำมาใช้โดยไม่ค่อยตระหนักกันว่าสิ่งนั้นคือเรขาคณิต

¹บทความนี้จะสะกดชื่อ "ยุคลิด" ตามราชบัณฑิตยสถานเป็นหลัก แต่หากเป็นการอ้างอิงข้อมูลจากแหล่งอื่นที่ใช้การสะกดว่า "ยูคลิด" ก็ยังคงตัวสะกดตามแหล่งอ้างอิงนั้นเพื่อคงความถูกต้องของข้อความที่คัดลอกไว้

แบบยูคลิด (Euclidean Geometry) หากว่ากันตามข้อเท็จจริง ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์และเพิ่มองค์ความรู้ทางทฤษฎีต่างๆ ที่ทำกันในการเรียนเรขาคณิต ก็คือการใช้ระบบตรรกะพื้นฐานและรูปแบบวิธีทางคณิตศาสตร์ที่ยูคลิดได้ริเริ่มไว้ แต่เมื่อประวัติศาสตร์เรื่องนี้ถูกละเลยมากเข้า ทำให้การเชื่อมโยงความรู้กลับไปสู่ยูคลิดค่อยๆ เลือนรางไป

การนำเรขาคณิตแบบยูคลิดมาพิจารณาในเชิงประวัติศาสตร์ภูมิปัญญา จึงน่าจะเป็นประโยชน์ โดยจะได้ทราบที่มาของวิธีการสร้างองค์ความรู้ทางเรขาคณิต แต่ที่เหนือไปกว่านั้นและเป็นประเด็นที่บทความนี้จะชี้ให้เห็น คือ เนื้อหาใน *Elements* ของยูคลิดมีความโดดเด่นอย่างไร และเหตุใดกระบวนการศึกษาเรขาคณิตแบบที่สถาปนาขึ้นเมื่อกว่าสองพันปีที่แล้วยังใช้งานได้จนปัจจุบัน ลักษณะเช่นนี้แตกต่างกับองค์ความรู้อีกจำนวนมากที่แม้จะใหม่กว่าหรือถูกสร้างขึ้นในช่วงเวลาที่ใกล้เคียงกับสมัยปัจจุบันมากกว่า แต่กลับกลายเป็นความรู้ที่หมดสิ้นความนิยมไปอย่างง่ายดาย ในเมื่อผลงานของยูคลิดเป็นที่ยอมรับและใช้งานอย่างต่อเนื่องภายใต้ประวัติศาสตร์อันยาวนาน ย่อมสมควรพิจารณาเป็นอย่างยิ่งว่าในผลงานนั้นได้ริเริ่มสร้างสิ่งใดไว้และมีคุณูปการอย่างไรต่อการศึกษาระขาคณิต

หากพิจารณาจากชื่อของบทความย่อมจะพบว่า ผู้เขียนต้องการศึกษาคุณูปการของ เรขาคณิตแบบยูคลิด เหตุที่องค์ความรู้เรื่องนี้สามารถดำรงบทบาทไว้ได้ยาวนานในประวัติศาสตร์ภูมิปัญญามาจากการสถาปนาสิ่งที่ผู้เขียนเรียกขานในที่นี้ว่า เทะทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Space) ขึ้นมาสำเร็จนั่นเอง

อันที่จริงแล้วเมื่อเอ่ยถึงวิชาคณิตศาสตร์ คนทั่วไปอาจจะมโนภาพเกี่ยวกับศาสตร์ที่ว่าด้วยตัวเลข การแก้โจทย์ปัญหา สมการ และการหาคำตอบด้วยการคำนวณ คำว่านักคณิตศาสตร์มักจะถูกทาบทับด้วยภาพของผู้ที่คำนวณตัวเลขได้อย่างรวดเร็ว หรือหมกมุ่นกับตัวเลข ตัวแปร หรือสมการที่ซับซ้อน ดูจะห่างไกลจากวิถีการดำเนินชีวิตของคนปกติ มโนภาพนี้น่าคณิตศาสตร์ในสาขาที่เกี่ยวข้องกับระบบจำนวน (Number System) หรือเลขคณิต (Arithmetic) มาใช้เป็นตัวแทนหลักของวิชาคณิตศาสตร์

เหตุผลหนึ่งที่จำนวนและตัวเลขถูกใช้เป็นมโนทัศน์หลักที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์น่าจะเป็นผลพวงจากความคุ้นเคยของมนุษย์ เนื่องจากการศึกษา

เกี่ยวกับจำนวน ทั้งเศษส่วนและจำนวนเต็ม ระบบการนับ การกระทำทางคณิตศาสตร์ของจำนวน เช่น การบวก ลบ คูณ หาร เศษส่วน หรือแม้แต่เลขยกกำลัง คือสิ่งที่ไหลเวียนอยู่ในวิถีชีวิตของมนุษย์ เช่น การค้าขาย คำนวณกำไร-ขาดทุน การคำนวณส่วนลดราคา การประเมินภาษี การชั่งตวงวัดสิ่งต่างๆ ที่ล้วนแต่อาศัยตัวเลขเป็นสื่อทางความคิดทั้งสิ้น ในปัจจุบัน ตัวเลขไม่ใช่เพียงมีไว้เพื่อการนับหรือใช้เป็นหน่วยวัด แต่ยังเกี่ยวข้องอย่างมากในระบบข้อมูล ข้อมูลต่างๆ ถูกแปรสภาพให้เป็นตัวเลขเพื่อประโยชน์ในการทำงานได้ง่าย นี่น่าจะเป็นเหตุให้ตัวเลขและการคำนวณเบื้องต้นทั้งหลายยึดครองมโนภาพของคณิตศาสตร์เกือบจะเบ็ดเสร็จ เพราะมีความเกี่ยวข้องกับวิถีชีวิตทั่วไปของมนุษย์มากที่สุด แต่เท่าที่อธิบายมานี้ยังไม่ปรากฏเงื่อนไขใดที่บ่งชี้ว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องมีเทศะ (Space) เป็นองค์ประกอบ

อย่างไรก็ตาม มีคณิตศาสตร์บางสาขาซึ่งจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีเทศะหรือที่ว่างเพื่อใช้เป็นเครื่องมือประกอบการสร้างองค์ความรู้ในแขนงนั้นๆ สำหรับผู้ที่ผ่านการเรียนเรขาคณิตมาแล้วย่อมปฏิเสธได้ยากว่า สิ่งที่สำคัญอย่างมากในการเรียนวิชานี้คือจะต้องมี “พื้นที่ว่าง” ให้วาด เขียน หรือพิสูจน์ด้วยการวาดรูปภาพ จะใช้เพียงการคำนวณแบบคิดในใจไม่ได้ เพราะคณิตศาสตร์สาขานี้คือการศึกษาเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต (Geometrical Figure) และรูปทรงตัน (Solid Figure) ต่างๆ ว่ามีสมบัติอย่างไร มีสูตรการคำนวณหาพื้นที่และปริมาตรของรูปทรงต่างๆ อย่างไร ในที่นี้ “พื้นที่ว่าง” จึงไม่ได้หมายความว่าเพียงการมีกระดาษหรือกระดานดำให้ใช้วาดรูปประกอบการเรียนเรขาคณิตเท่านั้น แต่วิชาเรขาคณิตจำเป็นต้องมีบางสิ่งที่มีมากกว่านั้น กล่าวโดยย่อคือ ความรู้ทางเรขาคณิตจำเป็นต้องอาศัย “เทศะ” ซึ่งเป็นที่ว่างที่มีสมบัติ (Property) บางอย่างที่สามารถรองรับองค์ประกอบทั้งหลายทางเรขาคณิตตั้งแต่ จุด เส้น ระนาบ พื้นผิว ตลอดจนรูปสองมิติและรูปทรงสามมิติต่างๆ ให้ดำรงสมบัติทางเรขาคณิตไว้ได้ภายในเทศะทางคณิตศาสตร์นี้ ซึ่งประเด็นนี้คือข้อเสนอลหลักของบทความนี้จะขยายความต่อไป

อนึ่ง ในวิชาคณิตศาสตร์มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างคำว่า area กับ space สำหรับการแปลของคำศัพท์ทั้งสองคำดังกล่าวเป็นภาษาไทย (ราชบัณฑิตยสถาน, 2553: 276, 403) กำหนดให้ศัพท์คำว่า area มีคำแปลว่า

‘พื้นที่’ ส่วน space แปลว่า ‘ปริภูมิ’ หรือ ‘-สามมิติ’ อย่างไรก็ดี มีบางกรณี que เลือก แปลศัพท์คำว่า space ว่า ‘เทศะ’ (บาร์เกอร์, 2551: 30) คำว่า space เองยัง หมายถึงอวกาศซึ่งแสดงถึงนัยยะของที่ว่างแบบสามมิติ (มีทั้งความกว้าง ความยาว และความสูง) ขณะที่คำว่าพื้นที่ มักจะใช้กับขอบเขตที่เป็นสองมิติ (กว้างและยาว) เท่านั้น ดังนั้น ผู้เขียนเลือกใช้คำว่า “เทศะ” เพื่อให้ตรงกับประเด็นหลักของบทความ ที่ต้องการกล่าวถึงความก้าวหน้าทางประวัติศาสตร์ภูมิปัญญาของมนุษย์ในการสร้าง “เทศะ-ปริภูมิ” เชิงอุดมคติขึ้นมาให้มีลักษณะเฉพาะที่สามารถรองรับระบบคิด เชิงตรรกะทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไม่รู้จักจบ ซึ่งถือเป็นความริเริ่มที่สำคัญอย่างยิ่ง ของยุคคลิด

กล่าวโดยสรุป วัตถุประสงค์ของบทความชิ้นนี้ประกอบด้วย

1. การอธิบายว่าเทศะทางคณิตศาสตร์คืออะไร และมีบทบาทหรือความจำเป็นอย่างไรในการศึกษาคณิตศาสตร์
2. เราคาดคิดแบบยุคคลิดมีบทบาทเกี่ยวข้องอย่างไรกับการทำความเข้าใจ เรื่องเทศะทางคณิตศาสตร์
3. การอธิบายถึงความสำคัญของการสร้างเทศะทางคณิตศาสตร์ใน เชิงประวัติศาสตร์ภูมิปัญญา

บททวนเรขาคณิต

ก่อนที่จะเข้าสู่ประเด็นหลักของบทความ มีความจำเป็นที่จะต้องอุทิศ เนื้อหาบางส่วนเพื่อทำความเข้าใจโดยสังเขปว่า วิชาเรขาคณิตนั้นเป็นความรู้ที่ ี่ว่า ด้วยอะไร

ในที่นี้ขอเริ่มจากคำจำกัดความของเรขาคณิตอันได้แก่ “geometry = the mathematics of the properties, measurements, and relationships of points, lines, angles, surfaces, and solids. ...[...Gk. < geometrien, to measure land : ge, earth + metron, measure]” (*The American heritage college dictionary*, 1993: 570) ซึ่งถอดความได้ว่า เรขาคณิตเป็นคณิตศาสตร์ สาขาหนึ่งที่ศึกษาสมบัติ การวัด และความสัมพันธ์ของจุด เส้น มุม พื้นผิว และ รูปทรง นอกจากนี้ หากพิจารณาจากรากศัพท์คำๆ นี้แปลว่าการวัดพื้นโลก เท่ากับ

บ่งบอกประวัติศาสตร์ขององค์ความรู้สาขานี้ว่าเริ่มต้นมาจากการวัดขนาดที่ดินนั่นเอง

พื้นฐานอารยธรรมสมัยโบราณโดยเฉพาะอียิปต์มีความจำเป็นต้องกำหนดเขตที่ดินเกษตรกรรม แต่สภาพน้ำท่วมทุกปีจากแม่น้ำไนล์ได้ทำลายเครื่องหมายต่างๆ ที่เคยทำไว้ในปีก่อนๆ เมื่อต้องกำหนดเขตที่ดินใหม่จึงเหมือนกับการแก้โจทย์ปัญหา (หาตำแหน่งที่ไม่รู้ โดยอาศัยข้อมูลบางส่วนที่เหลืออยู่) ชาวอียิปต์สำรวจพื้นที่และแก้ปัญหาเหล่านี้จนพัฒนาเป็นทักษะ อาศัยการสังเกตความรู้จากประสบการณ์ จนสามารถสรุปหลักการบางอย่างในเชิงเรขาคณิต เช่น สูตรการหาพื้นที่ ความสัมพันธ์ระหว่างด้านของรูป และสามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการกำหนดเส้นแบ่งเขตและการเปรียบเทียบขนาดที่ดิน จนถึงการออกแบบทางสถาปัตยกรรมและวิศวกรรมด้วย ต่อมาชาวกรีกเรียกความรู้เกี่ยวกับจุด เส้น และรูป ว่าเรขาคณิต ซึ่งแปลว่าการวัดพื้นโลกตามนัยยะของอียิปต์ แต่สิ่งที่ไม่เหมือนชาวอียิปต์ คือ ชาวกรีกชื่นชมเรขาคณิตไม่ใช่เพราะการใช้ประโยชน์ หากแต่สนใจความสำคัญเชิงทฤษฎี ชาวกรีกไม่พอใจการศึกษาเชิงประสบการณ์ แต่ต้องการข้อพิสูจน์ด้วยวิธีนัยอย่างเคร่งครัดเพื่อให้ได้กฎทั่วไปหรือทฤษฎี (บาร์เกอร์, 2551: 24-26)

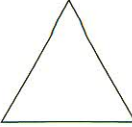
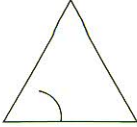
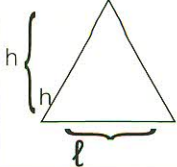
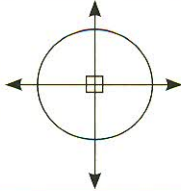
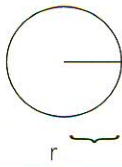
ความขำขันช่วยยืนยันถึงพลังทางภูมิปัญญาของอารยธรรมกรีกได้เป็นอย่างดี นักปราชญ์กรีกส่วนมากมีความหลงใหลในปรัชญานามธรรมที่ลึกซึ้ง แม้แต่เรื่องราวที่พัฒนาขึ้นจากประสบการณ์ในเชิงปฏิบัติ (เรขาคณิตในอารยธรรมอียิปต์) แต่นักปราชญ์กรีกกลับไม่พอใจเพียงเท่านั้นและต้องการยกระดับการคิดให้เป็นนามธรรมยิ่งขึ้น หรือค้นหาสัจธรรมที่เที่ยงแท้แน่นอนจนกำหนดเป็นทฤษฎีได้ ซึ่งความมุ่งหมายนี้ไม่เพียงปรากฏขึ้นเฉพาะในระบบคิดทางคณิตศาสตร์ของกรีก แต่ยังถือเป็นเอกลักษณ์ที่โดดเด่นของภูมิปัญญากรีกแทบทุกๆ ด้าน

ย้อนกลับไปทีละจำกัดความข้างต้น สิ่งที่เรขาคณิตสนใจศึกษาคือ องค์ประกอบ สมบัติ และทฤษฎี ที่เกี่ยวข้องกับรูปร่างและรูปทรงเรขาคณิตหลากหลายชนิด เป็นการศึกษาเพื่อברורข้อสรุปเชิงทฤษฎีหรือได้สัจธรรมบางอย่าง ตัวอย่างเช่น ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดคือระยะทางที่เป็นเส้นตรง สามเหลี่ยมใด ๆ มีสมบัติรวมกันคือมีผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180° วงกลมใดๆ มีสูตรคำนวณพื้นที่เหมือนกันคือ πr^2 มุมจากทุกมุมมีขนาด 90° ทฤษฎีบทที่ว่าเส้นตรงสองเส้น

ตัดกันเกิดจะมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน ปริมาตรทรงกระบอกเท่ากับ $\pi r^2 h$ เป็นต้น ลักษณะของความรู้เหล่านี้เริ่มทำความเข้าใจตั้งแต่องค์ประกอบพื้นฐานของรูปร่าง และรูปทรง (จุด เส้น และมุม) แล้วพัฒนาไปสู่การสรุปเป็นสมบัติบางประการ หรือเป็นข้อสรุปเชิงทฤษฎีที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ กล่าวอีกนัยหนึ่ง เป็นการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรมที่เป็นสากลยิ่งขึ้น (ครอบคลุมกรณีย่อยต่างๆ ไว้ภายใต้กฎเดียวกัน) ตามแนวทางของภูมิปัญญากรีก ทั้งนี้ ด้วยลักษณะที่กล่าวมาจะเห็นได้ในเบื้องต้นว่า เราคาดเดานั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องอาศัยทักษะเพื่อให้รองรับสิ่งที่กำลังศึกษา

เพื่อให้เห็นรูปแบบการสร้างองค์ความรู้หรือทฤษฎีเรขาคณิต โดยพัฒนาจากองค์ประกอบส่วนย่อยแล้วนำไปสู่ความรู้ที่เป็นสากลยิ่งขึ้น ขอให้พิจารณาจากตัวอย่างในตารางที่ 1 กรณีของรูปสามเหลี่ยม โดยปกติแล้วสามเหลี่ยมมีองค์ประกอบพื้นฐานคือส่วนของเส้นตรงสามเส้นประกอบเข้าด้วยกัน สามเหลี่ยมมีหลายประเภท เช่น สามเหลี่ยมหน้าจั่ว สามเหลี่ยมด้านเท่า สามเหลี่ยมมุมฉาก แต่ไม่ว่าจะมีความหลากหลายแค่ไหน วิชาเรขาคณิตสามารถสรุปลักษณะเฉพาะที่เป็น “สากล” ซึ่งสามเหลี่ยมทุกประเภทต้องมีส่วนร่วม เช่น มุมภายในของสามเหลี่ยมใดๆ รวมกันได้ 180° หรือการคำนวณพื้นที่สามเหลี่ยมซึ่งมีสูตรว่า $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$ เป็นต้น ตัวอย่างนี้จึงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ (ส่วนของเส้นตรง) รูป (สามเหลี่ยม) สมบัติ และพื้นที่ ซึ่งขยายจากองค์ประกอบย่อย พัฒนาขึ้นเป็นทฤษฎีเรขาคณิตนั่นเอง ตารางที่ 1 แสดงการลำดับความคิดโดยเริ่มจากองค์ประกอบย่อยไล่เรียงไปจนถึงการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับสมบัติและพื้นที่ของรูป

ตารางที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ รูป สมบัติ และพื้นที่

องค์ประกอบ	รูป	สมบัติ	พื้นที่
ส่วนของเส้นตรง	สามเหลี่ยม	มุมภายในรวมกันเท่ากับ 180°	$\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$ $= \frac{1}{2}hl$
			
จุด และ รัศมี	วงกลม (ทุกจุดบนเส้นรอบวงห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากับรัศมี)	มุมภายใน 360° (สี่มุมฉาก)	πr^2
			

วิธีการขยายขอบเขตองค์ความรู้โดยคิดต่อยอดขึ้นจากองค์ประกอบย่อยที่เป็นพื้นฐาน จัดได้ว่าเป็นพัฒนาการทางภูมิปัญญาทางเรขาคณิตสมัยกรีกที่มีลักษณะเฉพาะ ไม่ใช้วิธีสรุปจากประสบการณ์แต่ก้าวไปสู่ระบบคิดที่เป็นตรรกะและมีความเป็นนามธรรมสูง นักปราชญ์กรีกจำนวนมากหลงใหลเรขาคณิตในฐานะที่เป็นกิจกรรมทางปัญญาชั้นสูง ยิ่งในกรณีของเพลโต (Plato) ยังจัดเรขาคณิตว่าเป็นองค์ความรู้ที่สื่อถึงอุดมคติที่เที่ยงแท้ของปรัชญาธรรมชาติอีกด้วย ด้วยสถานะที่สูงส่งของเรขาคณิตจึงมีการคิด สร้าง และพิสูจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิตจำนวนมากในสมัยกรีก มากเพียงพอที่จะให้นักคณิตศาสตร์คนหนึ่งเกิดความตั้งใจที่จะรวบรวมทฤษฎีและข้อพิสูจน์ต่างๆ ทางเรขาคณิตเหล่านั้น ตลอดจนทฤษฎีคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ เข้าไว้ด้วยกัน และผนวกระบบคิดเชิงตรรกะเข้าไปเพื่อให้เกิดความสมบูรณ์ทางทฤษฎีมากยิ่งขึ้น นักคณิตศาสตร์นั้นคือยุคลิดและผลงานชิ้นนั้นก็คือหนังสือที่ชื่อ *Elements*

ประวัติและผลงานของยุคลิด

ในขณะที่ยุคลิดพยายามสร้างระบบคิดเชิงตรรกะที่กระจ่างชัด แต่ประวัติความเป็นมาของเขากลับเป็นตรงกันข้าม เนื่องจากหลักฐานเกี่ยวกับประวัติที่แน่ชัดของยุคลิดแทบไม่มี รายละเอียดบางอย่างเกี่ยวกับยุคลิดจึงต้องอาศัยการอนุมานหรือเทียบเคียงจากหลักฐานอื่นๆ อย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

ปัญหาประการแรก คือ นักประวัติศาสตร์ไม่มีหลักฐานที่ชัดเจนเกี่ยวกับกำเนิดของยุคลิด หนังสือจำนวนมากเรียกเขาว่ายุคลิดแห่งอเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) แต่เขาไม่ใช่ชาวอเล็กซานเดรียโดยกำเนิด บางครั้งมีความสับสนว่าเขาเป็นคนเดียวกันกับยุคลิดแห่งเมการา (Euclid of Megara) ซึ่งเป็นศิษย์ของโสเครตีส และไม่มีความสนใจคณิตศาสตร์สักเท่าไร ราว 306 ปีก่อนคริสต์ศักราช ยุคลิดได้รับเชิญมายังอเล็กซานเดรียในสมัยของกษัตริย์ทอเลมีที่ 1 (Ptolemy I) เนื่องจากภายหลังพระเจ้าอเล็กซานเดอร์มหาราชสิ้นพระชนม์ลงและจักรวรรดิของพระองค์แตกสลายอยู่ภายใต้การปกครองของเหล่าขุนศึกรวมถึงทอเลมีที่ 1 ด้วย ทอเลมีที่ 1 ปกครองอียิปต์และได้สถาปนาสถาบันเรียนรู้แห่งหนึ่งขึ้นที่อเล็กซานเดรียโดยเรียกสถานที้นั้นว่ามิวเซียม (Museum) ยุคลิดได้รับเชิญให้มาเป็นผู้สอนคณิตศาสตร์ที่นี่เพราะมีผลงานโดดเด่นเป็นตำราคณิตศาสตร์ที่ประสบความสำเร็จอย่างสูงคือ *Elements* เนื้อหาของ *Elements* ทำให้อนุมานได้ว่ายุคลิดต้องเคยศึกษากับศิษย์ของเพลโตหรือไม่ก็ต้องเคยศึกษาที่ Academy of Plato ยุคลิดมีผลงานหลายชิ้น แต่ส่วนมากสูญหายไป ทำให้เสียโอกาสที่จะพิสูจน์ว่าความรู้คณิตศาสตร์บางสาขาที่เชื่อกันว่าพัฒนาขึ้นในสมัยใหม่ จริงแล้วอาจถือกำเนิดขึ้นมาตั้งแต่สมัยกรีก (Boyer and Merzbach, 1989: 115-116) ทั้งนี้ มิวเซียมดังกล่าวมีสถานะประหนึ่งมหาวิทยาลัยจึงมีการเชิญบุคคลมีชื่อเสียงมาสอน ไม่ได้เป็นแต่เพียงพิพิธภัณฑ์ตามความหมายสมัยใหม่

Bulmer-Thomas (1991: 689) สรุปไว้ว่า มีข้อเท็จจริงเกี่ยวกับชีวิตของยุคลิดเพียง 2 ข้อเท่านั้นที่คนรุ่นหลังพอจะมั่นใจได้ว่าเป็นประวัติที่ถูกต้องของเขา ข้อแรกคือ ยุคลิดต้องมีชีวิตอยู่ระหว่างช่วงสามุติศวรรษของเพลโต (347 ปีก่อนคริสต์ศักราช) จนถึงช่วงของอาร์คิมิดีส (Archimedes, ราว 287 ปีก่อนคริสต์ศักราช) และข้อที่สองคือ เขาสอนอยู่ที่อเล็กซานเดรีย แต่ถึงกระนั้น ข้อเท็จจริง

เพียง 2 ข้อนี้ก็ยังคงเป็นที่โต้เถียงบ้าง เช่น การสรุปว่ายุคลิดมีอายุมากกว่าอาร์คิมิดีส นั้น มักจะอนุมานจากงานเขียนชิ้นหนึ่งของอาร์คิมิดีสที่อ้างอิงชื่อยุคลิด ซึ่งมีผู้โต้แย้งว่าเป็นการอนุมานที่ผิด แม้ประวัติของยุคลิดจะเป็นสิ่งพัวพันในประวัติศาสตร์ แต่ในแง่กรอบภูมิปัญญาของยุคลิด เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่างานเขียนของยุคลิดต้องเป็นผลงานรุ่นหลังจากศิษย์ของเพลโตและรุ่นก่อนอาร์คิมิดีส

ประเด็นนี้เป็นตัวอย่างของการศึกษาในแนวทางประวัติศาสตร์ภูมิปัญญา กล่าวคือ เพลโตเป็นนักปราชญ์ผู้หนึ่งที่ถือเป็นเสาหลักของปรัชญากรีก ชื่อเสียงที่สำคัญด้านหนึ่งของเพลโตคือความทุ่มเทให้กับคณิตศาสตร์ในฐานะองค์ความรู้ที่ช่วยให้เข้าถึงแบบแผนหรือรหัสที่แฝงอยู่ในธรรมชาติ นักปราชญ์ต้องศึกษาคณิตศาสตร์ไม่เช่นนั้นย่อมไม่สามารถเข้าถึงความจริงแท้ในธรรมชาติได้ Academy of Plato นับเป็นสถาบันที่ทราบกันทั่วไปว่าไม่ต้อนรับผู้ที่ไม่รู้คณิตศาสตร์ หากจะเข้ารับการศึกษาจะต้องทุ่มเททำความเข้าใจคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ด้วยเหตุนี้จึงไม่แปลกที่ข้อสรุปจากหลายๆ แหล่งจะเห็นตรงกันว่า ยุคลิดต้องได้รับอิทธิพลการศึกษาคณิตศาสตร์มาจากแนวทางของเพลโตเป็นแน่ หากไม่ได้รับการศึกษาจากศิษย์ของเพลโตโดยตรง ก็น่าจะต้องมีช่องทางเกี่ยวข้องกับ Academy of Plato บ้างทางใดทางหนึ่ง แม้จะไม่มีหลักฐานยืนยันชีวิตประวัติช่วงดังกล่าวของยุคลิดก็ตาม

ด้วยเหตุที่ *Elements* มีความสำคัญดังที่กล่าวมา รวมทั้งบทความนี้จะใช้เนื้อหาจาก *Elements* ศึกษาความคิดเรื่องทิศทางคณิตศาสตร์ จึงจำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงเนื้อหาโดยสังเขปของหนังสือดังกล่าวไว้ด้วย

ชื่อเสียงทางคณิตศาสตร์ของยุคลิดไม่ได้มาจากการค้นพบเรื่องใหม่ๆ หากแต่เป็นทักษะการอธิบายเรื่องราวที่ซับซ้อน ซึ่งทักษะดังกล่าวทำให้ *Elements* ประสบความสำเร็จอย่างสูงและดำรงความสำคัญอยู่ยาวนานไร้คู่แข่ง บางครั้งมีความเข้าใจผิดว่า *Elements* เป็นตำราว่าด้วยการรวบรวมความรู้เฉพาะด้านเรขาคณิตไว้ด้วยกัน แต่อันที่จริง *Elements* เป็นตำราเบื้องต้นที่ครอบคลุมคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (Elementary Mathematics) ทุกด้าน ทั้งเลขคณิต เรขาคณิตเชิงสังเคราะห์ (Synthetic Geometry) และพีชคณิต (Algebra) และควรทราบด้วยว่า ทักษะด้านการคำนวณไม่ได้ถูกรวมไว้ในงานชิ้นนี้เพราะค่านิยมกรีกไม่ถือเอาทักษะการคำนวณ

เป็นส่วนหนึ่งของการเรียนการสอนในระดับสูง โพรคลุส (Proclus) บรรยายไว้ว่าสถานะของ *Elements* ในวิชาคณิตศาสตร์เทียบได้กับบทบาทที่ตัวอักษร-อักขระมีต่อภาษา ในบางแง่มุม *Elements* ดูเหมือนจะเป็นความพยายามรวบรวมข้อมูลจำนวนมหาศาลไว้ด้วยกัน มีการอ้างอิงงานของบุคคลอื่นร่วมกับการค้นคว้าใหม่ๆ แต่ภารกิจสำคัญของผลงานชิ้นนี้คือ การจัดลำดับเชิงตรรกะ (Logical Order) ให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานทั้งหมด ยุคลิตไม่เคยกล่าวอ้างเรื่องความเป็นต้นตำรับ (Originality) ในผลงานของเขาและเห็นได้ชัดว่าเขานำความรู้จำนวนมากจากคนรุ่นก่อนมาใช้ แต่เชื่อกันว่ายุคลิตจัดเรียงเนื้อหาใน *Elements* เองอย่างเป็นอิสระ รวมทั้งการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในบางข้อเป็นผลงานที่ยุคลิตทำการพิสูจน์ด้วยตนเอง การประเมินว่า เนื้อหาใน *Elements* ส่วนใดบ้างที่ยุคลิตเท่านั้นเป็นผู้คิดค้นขึ้นจึงเป็นเรื่องที่ยากยิ่ง (Boyer and Merzbach, 1989: 119-120)

Elements คือหนังสือชุดจำนวน 13 เล่ม (หรือบท) หกเล่มแรกกล่าวถึงเรขาคณิตระนาบ (Plane Geometry) สามเล่มถัดมาว่าด้วยทฤษฎีจำนวน เล่มที่สิบกล่าวถึงสิ่งที่วัดค่าไม่ได้โดยใช้มาตรฐานเดียว (Incommensurables) และอีกสามเล่มสุดท้ายกล่าวถึงเรขาคณิตรูปทรง (Solid Geometry) ผลงานชิ้นนี้ไม่มีการเกริ่นด้วยบทนำ เล่มแรกเริ่มต้นด้วยนิยามจำนวน 23 ข้อ ซึ่งมีจุดอ่อนบ้างตรงที่นิยามบางข้อเหมือนกับไม่ใช่การนิยามที่ชัดเจน หรือไม่ได้แยกแยะองค์ประกอบบางส่วนของที่นำมาอ้างอิงว่านำมาจากนิยามข้ออื่นๆ (Boyer and Merzbach, 1989: 120) ราวคริสต์ศตวรรษที่ 4 เธอนแห่งอเล็กซานเดรีย (Theon of Alexandria) ได้ปรับปรุงเนื้อหาของ *Elements* โดยแก้ภาษาบางจุดเพื่อให้ชัดเจนมากขึ้น ขยายความบางตอน และเพิ่มเติมการพิสูจน์บางส่วน ต้นฉบับของ *Elements* ที่เป็นที่รู้จักกันจนถึงศตวรรษที่ 19 โดยมากตกทอดมาจากฉบับของเธอน ก่อนที่จะมีการค้นพบต้นฉบับที่เก่ากว่าในภายหลัง (Bulmer-Thomas, 1991: 690)

ทั้งนี้ Hawking (Hawking, 2005: 1-117) ได้นำเนื้อหาบางส่วนของ *Elements* มารวบรวมไว้ในรูปแบบเอกสารต้นฉบับที่แปลเป็นภาษาอังกฤษ (Original English Translation) ถือได้ว่าเป็นเอกสารชิ้นต้นที่เป็นงานเขียนของยุคลิตโดยตรง แม้จะไม่ใช่ภาษาดั้งเดิม (ภาษากรีก) ก็ตาม แต่เป็นการแปลตัวบทดั้งเดิมของยุคลิตบทความนี้จะอ้างอิงตัวบทใน *Elements* ของยุคลิตโดยนำมาจากฉบับแปลของ Hawking เป็นสำคัญ

โครงสร้างเนื้อหาของ *Elements* ประกอบด้วยประพจน์ (Proposition) หรือทฤษฎีบท (Theorem) ซึ่งพยายามพิสูจน์ข้อเสนอบางอย่าง นักคณิตศาสตร์กรีกแบ่งแยกอย่างระมัดระวังระหว่างวิธีพิสูจน์เชิงวิเคราะห์ (Analytic) กับเชิงสังเคราะห์ (Synthetic) *Elements* เป็นการสาธิตขั้นตอนการพิสูจน์โดยการสังเคราะห์ (Synthesis) จากสิ่งที่รู้ไปหาสิ่งที่ไม่รู้ อาศัยสมมติฐานเกี่ยวกับสิ่งที่ต้องการพิสูจน์แล้วใช้การนิรนัย (Deduction) ผลลัพธ์หลายๆ ขั้นตอน จนพบข้อสรุปบางประการที่ยอมรับได้หรือพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง (Bulmer-Thomas, 1991: 690-691)

อนึ่ง ลักษณะการนิรนัยนี้ไม่ใช่หลักการสังเคราะห์ความรู้ของเราคนใดเท่านั้น แต่ความรู้ด้านคณิตศาสตร์ทุกๆ แขนงล้วนดำเนินไปโดยกระบวนการนี้ ดังที่กล่าวไว้ว่า *Elements* มีเนื้อหาครอบคลุมความรู้ขั้นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด สะท้อนเป้าหมายของยุคลิดที่จะจัดระเบียบความรู้คณิตศาสตร์แขนงต่างๆ ไว้ภายใต้ระบบตรรกะที่เป็นเอกภาพและเป็นเหตุให้เขาต้องเขียนเป็นหนังสือชุดถึง 13 เล่ม อย่างไรก็ตาม ชื่อเสียงของยุคลิดถูกลดทอนลงให้เหลือแต่ด้านเรขาคณิตส่วนหนึ่งเพราะผลงานของยุคลิดเองที่ประสบความสำเร็จมากที่สุดในการสถาปนาขั้นตอนการลำดับเนื้อหาทางเรขาคณิต จนเกิดเป็นระบบเรขาคณิตแบบยุคลิด เมื่อรวมกับความไม่ตั้งใจทางประวัติศาสตร์ ทำให้คำว่าเรขาคณิตกลายเป็นภาพลักษณ์ประจำตัวของยุคลิด จนบดบังข้อเท็จจริงที่ว่า *Elements* ยังประกอบด้วยเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ ด้วย

เมื่อทราบถึงที่มาของผลงานของยุคลิดแล้ว ลำดับถัดไปจะอธิบายว่ารูปแบบการศึกษาเรขาคณิตของยุคลิดได้สร้างทิศทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาอย่างไร โดยส่วนที่จะนำมาวิเคราะห์คือเนื้อหาช่วงต้นของ *Elements* เล่มที่ 1 ซึ่งเกี่ยวข้องกับนิยาม (Definition) มุลบท (Postulate) และสัจพจน์ (Axiom) ที่ยุคลิดสร้างไว้ และกลายเป็นเครื่องมือสำคัญในการสังเคราะห์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ของเขา รวมถึงความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดของยุคลิดกับการสร้างทิศทางคณิตศาสตร์ ดังจะได้อธิบายต่อไป

ทิศทางคณิตศาสตร์ใน *Elements*

เมื่อได้ทราบภูมิหลังของยุคลิดและ *Elements* ไปบ้างแล้ว ในหัวข้อนี้จะได้วิเคราะห์เนื้อหาสาระที่ละเอียดขึ้น นอกจากจะทำความเข้าใจขั้นตอนการสร้างสรรคผลงานของยุคลิดแล้ว ยังจะสื่อถึงกระบวนการสร้างมโนภาพของทิศทางคณิตศาสตร์อันเป็นภูมิปัญญาเฉพาะของยุคลิดด้วย

นิยาม : จุดและเส้น

การทำความเข้าใจวิธีการสร้างเทศะของยุคลิดต้องเริ่มต้นจากการอธิบายสิ่งที่ยุคลิดเสนอตามลำดับชั้น ในเนื้อหาเล่มที่ 1 ของ *Elements* ยุคลิดได้กำหนดนิยาม² ทางเรขาคณิตขึ้นมา 23 ข้อ

1. A point is that which has no part.
2. A line is breadthless length.
3. The extremities of a line are points.

โดยทั่วไป “นิยาม” ควรจะกำหนดความหมายที่ชัดเจนของคำต่างๆ เช่น นิยามข้อ 1 กับ ข้อ 2 ของยุคลิดซึ่งกำหนดความหมายให้กับจุดและเส้น แต่กรณีข้อ 3 ข้อ 6 หรือ ข้อ 16 เป็นตัวอย่างของความไม่ชัดเจนว่ากำลังนิยามความหมายหรือเพียงแค่งบอกรความสัมพันธ์บางประการ โดยพรรณนาสมบัติทางเรขาคณิตซึ่งอ้างอิงจากสิ่งที่นิยามไว้ก่อนแล้ว เช่น นิยามข้อ 3 ระบุว่า ส่วนปลายของเส้น คือ จุด (จุด นิยามไว้ในข้อ 1) หรือข้อ 16 พรรณนาความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางกับวงกลม เป็นต้น ด้วยลักษณะเช่นนี้จึงเหมือนไม่เหมาะสมที่จะเรียกว่านิยามบางข้อของยุคลิดว่าเป็น “นิยาม” เพราะไม่แสดงให้เห็นการกำหนดความหมายที่แน่นอนชัดเจน แต่เพียงดึงเอาสิ่งที่เคยนิยามไว้ก่อนแล้ว (เช่น “จุด”) มาบอกความสัมพันธ์เฉพาะเจาะจงบางเรื่องเท่านั้น

อย่างไรก็ตาม วิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะเฉพาะซึ่งทำให้บ่อยครั้งปรากฏ “นิยาม” ในแบบที่ไม่ใช้การกำหนดความหมายด้วยคำทั่วไป แต่กลับนิยามศัพท์คณิตศาสตร์ด้วยการพรรณนาความสัมพันธ์แทน ตัวอย่างเช่น “บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใดๆ ของความสัมพันธ์ นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน” จากตัวอย่างนี้ นิยามที่พยายามอธิบายว่าฟังก์ชันคืออะไร ล้วนแต่ต้องอาศัยถ้อยคำที่เป็นนิยามเฉพาะอื่นๆ ได้แก่คำว่า “ความสัมพันธ์” “คู่อันดับ” “สมาชิกตัวหน้า” “สมาชิกตัวหลัง” โดยทั้ง 4 คำนี้ต่างเป็นศัพท์ที่ต้องกำหนดนิยามโดยเฉพาะไว้แล้วทั้งสิ้น (เหตุผลหนึ่งอาจเป็นเพราะพื้นฐานความคิดทางคณิตศาสตร์จำนวนมากอาศัยการรอบคอบคิดที่เป็นนามธรรมสูง)

กล่าวได้ว่า ในทางคณิตศาสตร์ “นิยาม” จำนวนหนึ่งมีข้อสงสัยในเรื่องนี้หากตีความในเชิงภาษาอย่างรัดกุม กรณีของยุคลิดก็ไม่ได้จำแนกความแตกต่างระหว่างนิยาม 23 ข้อนี้ไว้เช่นกัน ว่ามีข้อใดบ้างที่เป็น “นิยาม” จริงๆ และข้อใดที่เป็น “นิยาม” ที่บกพร่อง การแยกแยะความแตกต่างนี้เป็นสิ่งที่นักคณิตศาสตร์รุ่นหลังคิดขึ้นจากการไตร่ตรองงานของยุคลิด

เมื่อพิจารณาเป้าหมายของบทความซึ่งพยายามทำความเข้าใจเนื้อหาในแนวทางประวัติศาสตร์ภูมิปัญญา มากกว่าแนวทางปรัชญาคณิตศาสตร์ ผู้เขียนจึงขอเสนอโลกที่จะพิจารณาทั้ง 23 ข้อว่าเป็นนิยามซึ่งมีสถานะเดียวกันตามประวัติศาสตร์ที่ยุคลิดเคยใช้งานจริง หาใช่ว่าผู้เขียนไม่ตระหนักในประเด็นปัญหาข้างต้น

4. A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.

5. A surface is that which has length and breadth only.

6. The extremities of a surface are lines.

:

:

15. A circle is plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure are equal to one another;

16. And the point is called the centre of the circle.

:

:

23. Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

(Hawking, 2005: 7-8)

ดังที่กล่าวมาแล้วในเบื้องต้นว่า บทความนี้ไม่ได้ต้องการจะสร้างความเข้าใจในเนื้อหาวิชาเรขาคณิตตามที่ยุคลิดเสนอไว้อย่างทะลุปรุโปร่ง แต่เพียงต้องการแสดงให้เห็นว่า ยุคลิดสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาอย่างไรในงานของเขา จึงไม่มีความจำเป็นที่จะต้องคัดลอกนิยามทั้ง 23 ข้อมาไว้ ณ ที่นี้ แต่จะเลือกมาพิจารณาเฉพาะบางนิยามที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของบทความเท่านั้น

สิ่งที่เป็นรากฐานที่สุดของเรขาคณิตแบบยุคลิดคือ จุด (point) และเป็นนิยามข้อแรกที่เขากำหนดขึ้น นิยามข้อที่ 1 แปลความได้ว่า “จุดคือสิ่งที่ไม่มีส่วนประกอบ” (บาร์เกอร์, 2551: 33) นิยามนี้ได้สร้างปัญหาเชิงปรัชญาอยู่ไม่น้อย นั่นคือปัญหาที่ว่า ถ้าจุดเป็นสิ่งที่ไม่มีส่วนประกอบ (Part) ใดๆ เลย เช่นนั้นแล้วยุคลิดกำลังกล่าวถึงความว่างเปล่า (Emptiness) ใช่หรือไม่ หากประเมินความตั้งใจของยุคลิดย่อมเห็นได้ชัดว่า ยุคลิดไม่ได้กำลังนำเสนอสิ่งที่ว่างเปล่า

แต่กำลังนำเสนอบางสิ่งที่เรียกว่าจุด ซึ่งตามตรรกะของยูคลิด จุดเป็นสิ่งที่มียู (Exist) อย่างน้อยก็ในเทศะที่ยูคลิดมองภาพไว้ และนำมาใช้ศึกษาในขั้นตอนสืบเนื่อง แต่จุดไม่มีส่วนประกอบและไม่มีมิติ (Dimension) ให้กำหนดวัดอย่างเป็นรูปธรรม

จากนิยามข้อที่ 3 ยืนยันได้ว่า ยูคลิดถือว่าจุดเป็นพหุพจน์ซึ่งมีจำนวนได้มากกว่า 1 แต่ตามตรรกะและนัยยะของนิยามข้อที่ 1 จุดจะต้องมีลักษณะที่เป็นเอกพันธ์ (Homogeneous) นั่นคือจุดทุกจุดมีสมบัติเหมือนกันทั้งหมด ซึ่งอาจถกเถียงได้ว่าความข้อนี้จะจริงได้อย่างไรในเมื่อจุดไม่มีสมบัติทางกายภาพ ไม่มีมิติไม่มีส่วนประกอบให้ใช้เปรียบเทียบความเหมือนและความต่างใดๆ อย่างไรก็ตาม ในมุมมองกลับกัน ด้วยเหตุที่จุดนั้นไม่มีสมบัติ มิติ และส่วนประกอบ โดยทางตรรกะย่อมจะไม่อาจแยกแยะระหว่างจุดขนาดใหญ่หรือจุดขนาดเล็ก เพราะไม่สามารถนำไปเทียบเคียงกับสิ่งอื่นใดได้แม้แต่จุดด้วยตนเอง หากระบุว่าจุดคือวงกลมที่เล็กมากๆ จนถึงเล็กที่สุด (เช่น ขนาดเท่าปลายเข็มหรือปลายปากกา) ข้อความนี้ก็จะมีความขัดแย้งตรรกะทันที เพราะวงกลมน้อยย่อมจะต้องมีเส้นรอบวงกับเส้นผ่านศูนย์กลางอันเป็นองค์ประกอบพื้นฐานของวงกลมซึ่งมีขนาด (ความยาว) ที่กำหนดวัดได้ หรือพูดง่ายๆ คือ มีส่วนประกอบที่วงกลมพึงจะต้องมี (จุดศูนย์กลาง รัศมี และเส้นรอบวง) ทำให้ไม่สามารถรักษาสสมบัติของจุดเอาไว้ได้

ตามระบบตรรกะของยูคลิด เราจึงบรรยายรูปร่างและขนาดของจุดไม่ได้เป็นอันขาด เพราะไม่ว่าจะนำไปอ้างอิงกับรูปอื่นๆ ที่แม้จะมีขนาดเล็กเพียงใดก็ตาม แต่ตราบเท่าที่ “ขนาด” ยังเป็นสิ่งที่กำหนดวัดได้ การอ้างอิงรูปร่างย่อมต้องมีความขัดแย้งกับนิยามของจุด สิ่งเดียวที่ผู้ศึกษาทราบได้ คือ จุดเหมือนกันทั้งหมด (เป็นเอกพันธ์) และไม่มีส่วนประกอบ ไม่สามารถอาศัยรูปแบบอื่นใดเป็นตัวอ้างอิงเพื่อกำหนดนิยามให้กับจุดได้

ถัดมาในนิยามข้อที่ 2 ยูคลิดได้กล่าวถึงเส้น โดยบอกว่า เส้นคือสิ่งที่มีส่วนประกอบเดียวคือความยาว ไม่มีความกว้าง (Breadthless Length) เทียบกับจุดจะพบข้อแตกต่างว่า เส้นมีส่วนประกอบและมิติที่เพิ่มขึ้นมาคือความยาว (มีขนาดและวัดได้) เพราะฉะนั้น การจะแยกแยะความแตกต่างของเส้นตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปต้องพิจารณาจากความยาวเป็นสำคัญ ภายใต้นิยามนี้ เส้นย่อมไม่เป็นเอกพันธ์ ขณะที่จุดใดๆ ตั้งแต่สองจุดขึ้นไปนั้นไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบกับขนาด

แม้ยุคคิดจะระบุว่าเส้นมีมิติเป็นความยาว แต่ปัญหาเกี่ยวกับเส้นมีไม่น้อยไปกว่าจุด กล่าวคือ เส้นที่มีแต่ความยาวและไม่มี ความกว้างนั้นจะมีรูปร่างทางกายภาพเป็นอย่างไร หากคิดถึงสิ่งที่ เป็นรูปธรรม เช่น นำเข็มมาหนึ่งเล่มและบอกว่าเข็มนั้นเปรียบเหมือนเส้นตรงที่มีขนาดเล็กมาก แต่หากลองวัดขนาดเข็ม ยังต้องมีความหนาอยู่ หรือหากนำเส้นผมหนึ่งเส้นมายืดตรงแล้วบอกว่านั้นคือเส้นตรง ก็ไม่อาจเทียบได้กับนิยามของยุคคิด เพราะถึงแม้เส้นผมจะมีขนาดเล็กมาก แต่ด้วยเทคโนโลยีปัจจุบันที่มีกล้องจุลทรรศน์อย่างละเอียดใช้ มนุษย์สามารถส่องขยายดูแล้วระบุได้ว่าเส้นผมเส้นนั้นมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่าไร แม้จะวัดค่าได้เล็กน้อยเพียงใดก็ตามหรือแม้ในระดับไมครอน ก็เท่ากับยืนยันการมีอยู่ของมิติ ด้านความกว้าง (ความหนา) ของเส้นผม แต่เส้นตามที่ยุคคิดนิยามไว้นั้น เป็นนิยามว่าด้วยเส้นที่มีความยาวเป็นมิติเดียว ไม่มีความกว้างปรากฏให้เห็น หากพิจารณาจากความเป็นจริงทางกายภาพแล้ว เส้น (หรือสิ่งใด) ที่ไม่เหลือความกว้างไว้เลย (ความหนา = 0) ก็ไม่น่าที่มนุษย์จะมองเห็นหรือรับรู้การมีอยู่ของเส้นนั้นได้โดยผ่านประสาทสัมผัส

การจินตนาการถึงสิ่งที่ยุคคิดกล่าวไว้อาจใช้การทดลองทางความคิดได้เช่นกัน เช่น กรณีที่ต้องจินตนาการถึงเส้นตามนิยามของยุคคิด (มีแต่ความยาว ไม่มีความกว้าง) โดยนำดินสอที่ปลายที่เอว มาหนึ่งแท่งกับไม้บรรทัด แล้วใช้ทั้งสองสิ่งนั้นขีดเส้นตรงยาว 10 เซนติเมตรเส้นหนึ่งบนกระดาษ เราจะพบเส้นตรงที่มีความหนาที่สามารถวัดค่าได้ค่าหนึ่ง ต่อมาหากเหลาปลายดินสอให้แหลมขึ้นเล็กน้อย และลากเส้นตรง 10 เซนติเมตรอีกครั้ง จะปรากฏเส้นที่มีความยาวเท่ากันแต่ความหนาน้อยลง หากเหลาปลายดินสอให้เรียวแหลมขึ้นและลากเส้นที่ยาวเท่ากันเพิ่มทุกครั้งจะปรากฏเส้นตรงที่มีความหนาลดลง ซึ่งถือว่าเข้าใกล้ นิยามเส้นตรงตามมโนภาพของยุคคิดมากยิ่งขึ้น แต่หากต้องการสร้างเส้นที่ไม่มี ความหนาหรือความกว้าง เส้นนั้นย่อมจะไม่สามารถมีอยู่ในทางกายภาพอย่าง แน่นนอน ดังการทดลองในภาพที่ 1

ภาพที่ 1 การทดลองทางความคิดเพื่อสร้างเส้นที่มีสมบัติตามนิยามของยุคลิด



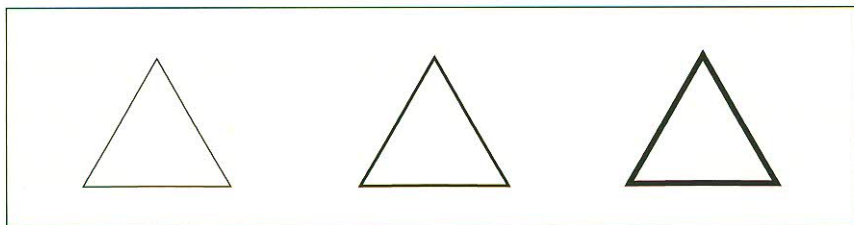
ถึงที่สุดจึงไม่สามารถสร้างเส้นที่ไร้ความกว้างหรือความหนาตามนิยามของยุคลิดได้ภายใต้ความเป็นจริงทางกายภาพ ไม่ว่าจะใช้ปลายดินสอที่เล็กเพียงใดความกว้างของเส้นจะยังคงปรากฏอยู่เสมอ ถึงแม้จะมีขนาดเล็กจนยากจะสังเกตเห็นด้วยตาเปล่าแต่ความกว้างนั้นยังคงมีอยู่ หรืออีกนัยหนึ่ง เส้นตามนิยามของยุคลิดเป็นสภาพที่พ้นไปจากข้อจำกัดเชิงกายภาพ เพราะสำหรับวัตถุที่มีขนาดและจับต้องได้จริง ย่อมไม่สามารถสร้างสิ่งนั้นขึ้นโดยให้มีแต่ความยาวและไม่มีมีความกว้าง แม้แต่การสร้างสิ่งที่ใกล้เคียงที่สุด (เช่น เส้นตรงที่บางมาก ๆ) ก็ยังไม่สามารถนำไปทาบกับมโนทัศน์ว่าด้วยเส้นของยุคลิดได้อย่างสมบูรณ์ เพราะยุคลิดไม่เปิดช่องหรือเปิดโอกาสให้มีเส้นมีความกว้างแม้แต่น้อย

ทั้งตัวอย่างกรณีจุดและเส้นเป็นสิ่งที่ป็นนามธรรมและแทบจะกล่าวได้ว่าองค์ประกอบทางเรขาคณิตทั้งสองประเภทนั้นสามารถคงสมบัติเชิงอุดมคติ (ตามที่ยุคลิดนิยามไว้) ได้ภายในเทศะทางคณิตศาสตร์เท่านั้น เทศะที่ยุคลิดใช้ (ซึ่งอาจจะมีสถานะเป็นเพียงมโนภาพทางความคิดหรือระบบวิธีคิดที่อาศัยตรรกะ) เป็นที่ว่างที่อนุญาตให้จุดซึ่งไม่มีส่วนประกอบใดๆ สามารถดำรงอยู่ได้ในเทศะนั้น และทำการศึกษาค้นคว้าได้โดยไม่ต้องใส่ใจเรื่องความเป็นจริงทางกายภาพ ภายในเทศะนั้นไม่จำเป็นต้องอาศัยการบรรยายถึงสมบัติของจุดอย่างเป็นรูปธรรม (เช่น ขนาด สัมผัส มิต) แต่อาศัยระบบเชิงตรรกะที่ยอมรับว่า มีเทศะนามธรรมช่วยรองรับสมบัติต่างๆ ของจุดและเส้นไว้ได้จริง เท่ากับการสร้างเทศะที่อนุญาตให้สมบัติต่างๆ ทางเรขาคณิตที่กำหนดขึ้นมาเป็นอิสระจากข้อจำกัดทางกายภาพอย่างสมบูรณ์

อาจมีคำถามตามมาว่า ความเป็นอิสระจากข้อจำกัดทางกายภาพมีประโยชน์หรือมีความจำเป็นอย่างไร โดยเฉพาะหากพิจารณาข้อเท็จจริงที่ว่าเรขาคณิตเริ่มต้นมาจากการแก้ปัญหาที่เป็นรูปธรรมดังกรณีของอียิปต์โบราณ แล้วเหตุใดประวัติศาสตร์ของความรู้สาขานี้จึงต้องพัฒนาขึ้นในทางที่เป็นนามธรรมสูงขึ้นดังกรณีของยุคลิด

เพื่อตอบคำถามนี้ ขอให้พิจารณาดูอย่างโดยคิดย้อนกลับไปยังกรณีขนาดของปลายดินสอ สมมติในชั้นเรียนแห่งหนึ่ง ครูกำลังสอนนักเรียน 3 คนเกี่ยวกับสามเหลี่ยม แล้วครูสั่งให้นักเรียนทุกคนวาดสามเหลี่ยมด้านเท่าลงบนกระดาษ ในความเป็นจริงเราจะพบว่า ปลายดินสอที่มีความแหลมไม่เท่ากัน ย่อมทำให้ขนาดของสามเหลี่ยมต่างกันไปบ้าง หากนักเรียนแต่ละคนต้องคำนวณหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของตนเองอย่างละเอียด ก็จะคำนวณพื้นที่ได้ไม่เท่ากัน เช่น สามเหลี่ยมที่เกิดจากเส้นดินสอซึ่งหนามากและคำนวณพื้นที่จากเส้นขอบนอกย่อมได้พื้นที่มากกว่ากรณีของนักเรียนที่วาดรูปสามเหลี่ยมด้วยดินสอปลายแหลมเล็ก ดังภาพที่ 2

ภาพที่ 2 สามเหลี่ยมที่เกิดจากเส้นที่มีความหนาไม่เท่ากัน



ไม่มีคนที่จะกล่าวว่า การสร้างรูปเรขาคณิตหรือแม้แต่ลากเส้นตรงสักหนึ่งเส้นในเชิงกายภาพ จะต้องปรากฏการเบี่ยงเบนหรือความหลากหลายของขนาดทางกายภาพอยู่เสมอ และหากคิดในเชิงตรรกะแล้ว ความหนาของเส้นที่ไม่ว่าจะมีค่าน้อยเพียงใดก็ตามเมื่อวัดค่าได้ ความหนานั้นไม่มีทางที่จะเท่ากับ 0 และส่งผลต่อขนาดของสิ่งที่กำลังศึกษาอย่างเลี่ยงไม่ได้ (กรณีภาพที่ 2) ในขณะที่ยุคลิดต้องการเส้นที่มีเพียงความยาว ส่วนความหนามีค่าเป็น 0 นิยามของยุคลิดเกี่ยว

กับจุดและเส้นจึงไม่ได้มีขึ้นเพื่อสร้างสิ่งที่เป็นอุดมคติหรือเป็นไปได้ให้เป็นจริง หากแต่มีขึ้นเพื่อให้ผู้ศึกษาเรขาคณิตยอมรับตรรกะของนิยามและหลักเกี่ยวกับปัญหาความหลากหลายทางกายภาพ ผู้ศึกษาพึงทราบว่ากำลังเรียนรู้ในสิ่งเดียวกัน มีสมบัติเฉพาะที่เหมือนกัน ถึงแม้ภาพที่ผู้ศึกษาลงมือวาดไว้ในสมุดของแต่ละคน จะแตกต่างกันในเชิงกายภาพก็ตาม

นิยามของยุคลิดจึงเป็นวิธีการนิยามภายใต้เงื่อนไขเฉพาะของเทศทางคณิตศาสตร์ หากสมมติให้นำจุด 9 จุดมาสร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าสามรูป (เช่น ที่ส่งนักเรียน 3 คนข้างต้น) โดยกำหนดระยะห่างของ 3 จุดที่ประกอบขึ้นเป็นสามเหลี่ยมหนึ่งรูปให้เท่ากันพอดี สามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นทั้งสามรูปในเทศทางคณิตศาสตร์ของยุคลิดนี้จะต้องเท่ากันทุกประการ โดยไม่มีปัญหาทางกายภาพ (มิติ) เช่น ความหนาของเส้น หรือ ขนาดของจุดปลายสามเหลี่ยม เข้ามาเป็นตัวสร้างความแตกต่าง เพราะในเทศนี้จุดเป็นสิ่งที่ไม่มีขนาดและเส้นมีแต่ความยาวไม่มีความหนา เมื่อจุดเป็นเอกพันธุ์ ส่วนเส้นที่กำหนดให้ก็ยาวเท่ากันทั้งหมด การประกอบกันขึ้นเป็นสามเหลี่ยมในกรณีนี้ รูปร่างของสามเหลี่ยมทั้งสามรูปที่เกิดขึ้นจึงต้องเท่ากันโดยสมบูรณ์ตามเงื่อนไขทางตรรกะและไม่มีประเด็นเรื่องความหนา (ซึ่งเป็นปัญหาทางกายภาพ)ปรากฏในเทศนี้

กล่าวอีกนัยหนึ่ง สิ่งที่ยุคลิดได้เริ่มต้นทำไว้คือการเปิดทางให้กระบวนการคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ (เรขาคณิต) สามารถกระทำขึ้นภายใต้มโนภาพของมนุษย์ โดยอาศัยเทศทางคณิตศาสตร์ที่เป็นอิสระจากเงื่อนไขทางกายภาพ การศึกษาตามแนวทางของยุคลิดคือการสร้างองค์ความรู้ที่เที่ยงแท้โดยพิจารณาสมบัติทางตรรกะแทนสมบัติทางกายภาพ

มูลบทและสัจพจน์

ถัดจากนิยามทั้ง 23 ข้อ ยุคลิดได้นำเสนอสิ่งที่เรียกว่ามูลบทและสัจพจน์ ทั้งสองสิ่งนี้แสดงให้เห็นการใช้ประโยชน์ของเทศทางคณิตศาสตร์ด้วยกัน

อนึ่ง การเลือกใช้คำแปลภาษาไทยสำหรับ postulate และ axiom นี้มีความแตกต่างในรายละเอียดอยู่บ้างเล็กน้อย กล่าวคือ ราชบัณฑิตยสถาน (2553: 279, 378) แปลคำว่า postulate และ axiom ด้วยคำแปลที่เดียวกันคือ “สัจพจน์”

สอดคล้องกับแนวโน้มที่นักคณิตศาสตร์บางส่วนมองไม่เห็นความจำเป็นจะต้องแยกแยะความแตกต่างระหว่างคำสองคำนี้ อย่างไรก็ตาม งานแปลในภาษาไทยบางชิ้นเลือกที่จะแปล postulate ว่า มूलบท และแปล axiom ว่า สัจพจน์ โดยจำแนกว่า “ความแตกต่างพื้นฐานระหว่างมूलบทและสัจพจน์สำหรับบุคคลดูเหมือนจะได้แก่การที่มूलบทเป็นกฎที่พูดถึงเนื้อหาของวิชาเรขาคณิตโดยเฉพาะ (เส้น มุม รูป ฯลฯ) ขณะที่สัจพจน์ไม่ได้พูดถึงอะไรที่เกี่ยวกับเรขาคณิตโดยเฉพาะแต่พูดถึงสิ่งทั่วไป สัจพจน์เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับความเท่ากันของขนาด ซึ่งเป็นเรื่องที่ใช้ได้กับสาขาวิชาอื่นๆ เป็นจำนวนมาก นอกเหนือจากเรขาคณิต” (บาร์เกอร์, 2551: 31-32)

การแยกแยะข้อแตกต่างตามแนวคิดที่กล่าวมาเคยมีปรากฏแล้วในอดีต โดยนักปราชญ์คนสำคัญอย่างอริสโตเติลเคยเสนอหลักเกณฑ์ที่แน่ชัดไว้ว่า สัจพจน์ (axiom หรือ common notion) ต้องเป็นสิ่งที่เชื่อได้ว่าเป็นจริงในตัวของมันเอง และเป็นสัจจะที่มีอยู่ร่วมกันในการศึกษาเรื่องใดๆ ก็ตาม จึงเป็นสิ่งที่ยอมรับได้ด้วย ความชัดเจนในตัวเอง ขณะที่ postulate จะมีความชัดเจนในตัวเองน้อยกว่า และมีลักษณะ “จำต้องกำหนดขึ้น” เพื่อให้ประกอบการศึกษาในหัวข้อที่สนใจ แต่เราไม่อาจทราบได้ว่าตัวบุคคลเองเห็นด้วยกับการจำแนกนี้หรือไม่ (Boyer and Merzbach, 1989: 120) บทความนี้ขอใช้คำแปลว่ามूलบทและสัจพจน์สำหรับ postulate และ axiom ตามลำดับ (ต่างจากศัพท์บัญญัติของราชบัณฑิตยสถาน) เพราะผู้เขียนเห็นด้วยว่าความแตกต่างระหว่างคำทั้งสองนี้มีนัยยะสำคัญ

ยุคลิดกำหนดมूलบทขึ้นมา 5 ข้อ ดังนี้

1. To draw a straight line from any point to any point.
2. To produce a finite straight line continuously in a straight line.
3. To describe a circle with any center and radius.
4. All right angles are equal to one another.
5. If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, will meet on that side on which the angles less than two right angles.

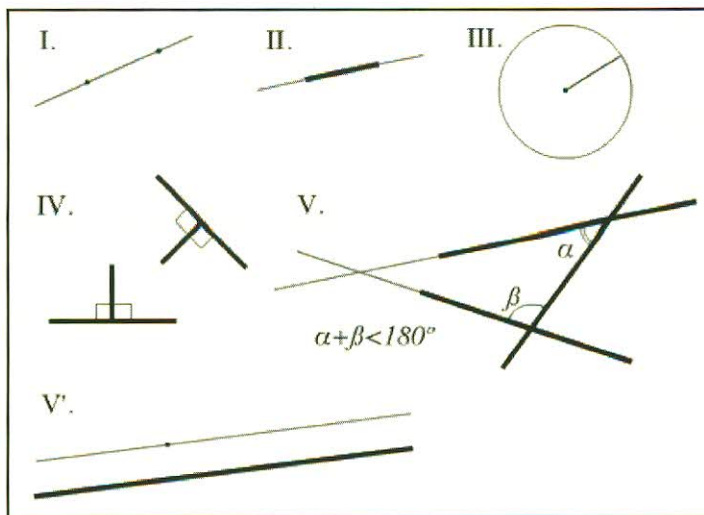
(Hawking, 2005: 8)

1. สามารถลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดจุดหนึ่งไปยังจุดอื่นใดๆ ได้
2. เส้นตรงจำกัดใดๆ สามารถถูกต่อออกไปเรื่อยๆ เป็นเส้นตรงได้
3. กำหนดจุดหนึ่งจุดและระยะใดระยะหนึ่ง สามารถเขียนวงกลมวงหนึ่งได้โดยใช้จุดที่กำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลางและระยะที่กำหนดให้เป็นรัศมี
4. มุมจากทุกมุมเท่ากันหมด
5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดผ่านเส้นตรงอีกสองเส้นจนกระทั่งผลบวกของมุมภายในสองมุมบนด้านด้านหนึ่งน้อยกว่าสองมุมฉากแล้ว ถ้าต่อเส้นตรงสองเส้นนั้นออกไปมากพอ เส้นตรงทั้งสองเส้นนี้จะตัดกันทางด้านของเส้นแรกด้านเดียว กับที่มุมทั้งสองนั้น

(บาร์เกอร์, 2551: 29)

มูลบทของยุคลิดคือข้อความที่มีบทบาทเป็นข้อสมมุติ (Assumption) เพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาขั้นต่อไป มูลบทได้นำสิ่งที่เคยปรากฏในส่วนของนิยาม (จุดและเส้น) มาขยายความต่อจากเดิม โดยกำหนดขึ้นในลักษณะที่มีความจำเพาะเจาะจงมากขึ้น โดยเฉพาะมูลบทข้อที่ 4 และ 5 ว่าด้วยมุมฉากและการบรรจบกันของเส้น อนึ่ง มูลบทข้อที่ 5 ในบางกรณีถูกเรียกว่าเป็นมูลบทของเส้นขนาน จริงอยู่ที่ยุคลิดได้นิยามเกี่ยวกับเส้นขนานไว้แล้วในนิยามข้อ 23 แต่ในกรณีของมูลบทข้อที่ 5 นั้น หากมุมที่เกิดขึ้นทั้งสองด้านของเส้นตัดเท่ากับสองมุมฉากพอดี เส้นสองเส้นที่ถูกเส้นตัดพาดผ่านนั้นจะต้องเป็นเส้นขนานที่ไม่มีวันบรรจบกันเท่านั้น การวาดภาพของมูลบททั้ง 5 ข้อให้เห็นเป็นรูปธรรมปรากฏตามภาพที่ 3 ซึ่งภาพดังกล่าวได้เพิ่มเติมรูปที่ใช้อธิบายมูลบทข้อที่ 5 ในกรณีเส้นขนานเอาไว้ด้วย

ภาพที่ 3 การแสดงมูลบทของยูคลิดด้วยภาพ



Source. (2011). Hellenistic Mathematics – Euclid [online].

Available: from: http://www.storyofmathematics.com/hellenistic_euclid.html/ [Accessed 22/1/2011].

ในกรณีของมูลบท จะเห็นได้ว่ายูคลิดได้ใช้ประโยชน์จากทิศทางคณิตศาสตร์ชัดเจนมากขึ้นในมูลบททุกๆ ข้อ เช่น มูลบทข้อที่ 1 ซึ่งระบุว่าสามารถลากเส้นตรงเส้นหนึ่งระหว่างจุด 2 จุดใดๆ มูลบทนี้ดูเป็นข้อความที่ธรรมดาอย่างมากและไม่ขัดแย้งใดๆ กับตรรกะทางความคิด สมมุติว่ามีกระดาษเปล่าแผ่นหนึ่ง แล้วใช้ปากกาจุดลงไป 2 จุดบนกระดาษนั้น ก็ไม่เป็นการยากเลยที่จะลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างสองจุดนั้น

แต่หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างมูลบทกับทิศทางคณิตศาสตร์ ย่อมพบว่าจุดเป็นสิ่งที่ยูคลิดกำหนดขึ้นและดำรงอยู่โดยอาศัยทิศทาง (ไม่ใช่ทางกายภาพ) ตามที่ได้วิเคราะห์ในหัวข้อก่อนหน้านี้ ดังนั้น การยอมรับได้โดยง่ายว่ามูลบทข้อที่ 1 เป็นจริง (โดยเฉพาะเมื่อไม่ต้องกังวลกับข้อจำกัดทางกายภาพ) แท้จริงแล้วคือการยอมรับสมบัติของทิศทางคณิตศาสตร์ไปพร้อมกัน

การยอมรับสมบัติของเศษทางคณิตศาสตร์เห็นได้จากการกำหนดให้จุดเป็นสิ่งที่อยู่เหนือข้อจำกัดทางกายภาพ เมื่อลากเส้นตรงระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในทางตรรกะหมายถึง จุดสองจุดนั้นจะห่างกันมากเพียงใดหรือน้อยเพียงใดก็ได้ ระยะห่างไม่มีผลต่อความจริงในเศษแห่งนี้ เทียบกับทางกายภาพ การลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งบนโลกไปยังจุดหนึ่งบนดวงจันทร์ ย่อมมีข้อจำกัดทางกายภาพมากกว่า การลากเส้นตรงยาว 1 ฟุตบนกระดานดำ แต่เพราะเศษทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่อยู่เหนือการรับรู้ของประสาทสัมผัสเศษนี้จึงไร้ขอบเขต ผู้ศึกษาเพียงแต่ต้องระลึกว่าเศษทางคณิตศาสตร์มีความสม่ำเสมอของตรรกะและเป็นเศษที่เป็นเอกพจน์ ดังนั้น ไม่ว่าจะเลือกจุดสองจุดใดๆ ให้มีระยะห่างกันมากเพียงใดเพื่อลากเส้นตรง เศษทางคณิตศาสตร์ก็จะรองรับความคิดนี้ได้ทั้งหมด หรืออีกนัยหนึ่ง เส้นตรงเกิดขึ้นได้ทั่วอาณาบริเวณของเศษ มุลบทข้อที่ 1 ย่อมเป็นจริงเท่าๆ กันสำหรับผู้ที่อยู่ภายใต้ระบบคิดเดียวกันนี้

มุลบทที่ 2 และ 3 ก็เช่นกัน การต่อเส้นตรงออกไปอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด หรือ การจินตนาการถึงวงกลมที่มีรัศมีกว้างใหญ่มหาศาลจนถึงรัศมีที่เล็กอย่างยิ่ง ดูไม่ใช่เรื่องจำเป็นในการแก้ปัญหาลักษณะคณิตในชีวิตประจำวัน ประเด็นที่สำคัญในโลกกายภาพอยู่ที่การวัดค่าและนำมาใช้ประโยชน์ ขณะที่มุลบทของยุคลิดทั้ง 2 ข้อนี้ (ข้อ 2 และ 3) ได้ข้ามพ้นขีดจำกัดทางกายภาพและบรรยายถึงเศษที่ไม่มีความสิ้นสุด สามารถรองรับการต่อขยายเส้นตรงหรือการเพิ่มรัศมีวงกลมได้เสมอ ขณะเดียวกัน เศษเป็นเอกพจน์ทำให้จุดไม่ว่าจะอยู่ที่ตำแหน่งใดก็สามารถเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมได้ ความเป็นเอกพจน์หมายความว่า ตำแหน่งของจุดไม่มีผลบิดเบือนสมบัติตามที่ระบุไว้ในมุลบท ความสัมพันธ์ระหว่างมุลบทกับเศษทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นมโนภาพภายใต้เศษที่เป็นอนันต์ (Infinite) อาจสรุปได้ดังนี้

มุลบท 3 ข้อแรกมีนัยสำคัญมากกว่าตัวบทที่ปรากฏตามข้อความที่กล่าวเอาไว้ จากมุลบทข้อแรกสามารถอนุมานได้ว่า ระหว่างจุดสองจุดใดๆ จะลากเส้นตรงเชื่อมต่อกันได้เพียงหนึ่งเส้นเท่านั้น ซึ่งมีความหมายเท่ากับว่า หากเส้นตรงสองเส้นใด ๆ มีจุดปลาย (Extremities) เดียวกัน เส้นทั้งสองจะมีความยาวที่

ทับกันสนิท (Coincide) หรือเส้นสองเส้นนั้นไม่สามารถปิดล้อมให้เกิดพื้นที่ขึ้นได้ มุลบทข้อที่ 2 อนุมานได้ว่า เส้นตรงสามารถต่อขยายไปในทิศทางของปลายแต่ละข้าง หรือการต่อขยายเป็นเอกเทศ (Unique) เส้นตรงสองเส้นใดๆ ไม่สามารถที่จะมีส่วนของเส้นตรงร่วมกัน และจากการที่เส้นตรงสามารถต่อขยายได้ไม่จำกัดขนาดและไม่จำกัดจำนวนครั้ง จึงสรุปได้เช่นกันว่า เรขาคณิตแบบยูคลิดเป็นอนันต์ในทุกทิศทาง มุลบทข้อที่ 3 กล่าวถึงรัศมีซึ่งอนุมานได้ว่า เทศะมีความต่อเนื่อง (Continuous) เพราะรัศมีอาจจะมีขนาดเล็กอย่างยิ่งก็เป็นได้

มุลบทข้อที่ 4 และ 5 มีสถานะต่างออกไปเพราะไม่ได้ระบุถึงขีดความสามารถที่จะกระทำเรื่องใดๆ[มุลบทข้อที่ 4] อนุมานว่ามุมฉากเป็นสิ่งที่ระบุขนาดได้ ซึ่งสามารถใช้เป็นบรรทัดฐานในการวัดขนาดมุมอื่นๆ แต่มุลบทข้อที่ 4 ยังยืนยันข้อสมมุติเรื่องความเป็นเอกพันธ์ของเทศะ (Homogeneity of Space) ด้วย เพราะหากจะพิสูจน์ข้อความนี้ ย่อมจะต้องพิสูจน์ได้ด้วยการเคลื่อนมุมฉากใดๆ ไปทับทับกับมุมฉากอื่นๆ เท่านั้น จึงจะบอกได้ถึงการทำทับกันสนิท ซึ่งเป็นไปตามข้อสมมุติว่าด้วยความไม่ผันแปรของรูป (Invariability of Figures) หรือความเป็นเอกพันธ์ของเทศะนั้นเอง

(Bulmer-Thomas, 1991: 691)

รายละเอียดของมุลบทและข้อความที่ยกมาสะท้อนว่า ยูคลิดใช้เทศะอย่างมีนัยสำคัญขึ้นทุกขั้นตอน ในกรณีของนิยามว่าด้วยจุดและเส้น เทศะถูกใช้เป็นที่รองรับโมทัศน์ให้สมบัติต่างๆ ตามนิยามนั้นเป็นไปได้ (เช่น การดำรงอยู่โดยไม่มีส่วนประกอบ) แต่ในกรณีของมุลบทจะเห็นได้ว่า ยูคลิดขยายการใช้ประโยชน์จากอาณาบริเวณในเทศะออกไปมากกว่านั้น ยูคลิดทำให้กรณีของมุลบทจำเป็นต่อจินตนาการถึงเทศะในมิติที่กว้างใหญ่นิยาม เช่น การต่อเส้นตรงให้ยาวไปได้ไม่สิ้นสุดตามมุลบทข้อที่ 2 ลักษณะการขยายความยาวนี้หมายถึงการกินอาณา

บริเวณเชิงนามธรรมที่ต่อเนื่องและเป็นอนันต์ ซึ่งกระทำไม่ได้ไม่สิ้นสุดภายใต้สมมุติฐาน
ความเป็นเอกพันธ์ของเทศะ เมื่อพิจารณาจากรายละเอียดเหล่านี้ จึงสรุปได้ว่า ระบบ
คิดตามตรรกะของเรขาคณิตแบบยูคลิดได้สร้างเทศะทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาให้
สามารถรองรับในภาพในการศึกษาเรขาคณิตอย่างมีประสิทธิภาพ

ถัดจากมูลบท ยูคลิดได้กล่าวถึงสัจพจน์อีก 5 ข้อ ซึ่งมีเนื้อหาดังนี้

1. Things which are equal to the same thing are also equal to one another.
2. If equals be added to equals, the wholes are equal.
3. If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.
4. Things which coincide with one another are equal to one another.
5. The whole is greater than part.

(Hawking, 2005: 8)

1. สิ่งที่เท่ากันกับสิ่งเดียวกันจะเท่ากัน
2. ถ้าสิ่งที่เท่ากันรวมกับสิ่งที่เท่ากัน ทั้งหมดก็จะเท่ากัน
3. ถ้าสิ่งที่เท่ากันถูกหักออกจากสิ่งที่เท่ากัน ที่เหลือก็จะเท่ากัน
4. สิ่งทับกันสนิท (coincide) กับอีกสิ่งหนึ่ง เป็นสิ่งที่เท่ากัน
5. ส่วนรวมใหญ่กว่าส่วนย่อย

(บาร์เกอร์, 2551: 32)

กรณีของสัจพจน์เป็นการกล่าวถึงข้อสมมุติบางอย่างที่พิจารณาแล้ว
มีสถานะเป็นความจริงพื้นฐาน บ้างถึงกับยอมรับว่าเป็นข้อความจริงในตัว
ของมันเอง และเป็นข้อความที่สอดคล้องกับการศึกษาเรื่องราวทั่วไปด้วยไม่เจาะจง
เฉพาะเรขาคณิต (ดูช่วงต้นหัวข้อ 4.2) ซึ่งแตกต่างจากมูลบทที่เป็นข้อความเจาะจงใน
ทางเรขาคณิต สัจพจน์ที่ยกมาทั้งห้าข้อข้างต้นจึงช่วยยืนยันข้อแตกต่างนี้อย่างชัดเจน

อนึ่ง เมื่อนำเทศะมาพิจารณาด้วยแล้ว จะเห็นได้ชัดว่า มูลบทเป็นสิ่งที่กำหนดขึ้นโดยอาศัยเทศะทางคณิตศาสตร์รองรับ ส่วนสัจพจน์เป็นข้อความที่แทบไม่ขึ้นกับเทศะแม้แต่น้อย โดยเฉพาะสัจพจน์มีลักษณะที่เอื้อต่อการเปรียบเทียบกับสรรพสิ่งทางกายภาพ ทั้งในแง่ผลรวม ผลต่าง การทับกันสนิท ไส้จนถึงสัจพจน์ข้อที่ 5 สัจพจน์จึงโยงเข้ากับเรื่องที่เป็นรูปธรรมใกล้ตัวมนุษย์ได้ง่ายกว่า เช่น สิ่งของที่ขนาดเท่ากันพอดี การเพิ่มหรือลดจำนวนของสิ่งของต่างๆ ปริมาตรของภาชนะที่เท่ากัน เป็นต้น ด้วยเหตุนี้การเข้าใจสัจพจน์จึงแทบไม่ต้องอาศัยเทศะทางคณิตศาสตร์มากนัก แต่สัจพจน์ยังคงเป็นสิ่งที่จำเป็นในเรขาคณิตแบบยุคลิด

หลังจากเริ่มต้นด้วยสาระของนิยาม มูลบท และสัจพจน์แล้ว สิ่งที่ยุคลิดกระทำต่อไปคือการพิสูจน์ทฤษฎีบท (Theorem) หรือประพจน์ (Proposition) ต่างๆ แต่เนื่องจากเป้าหมายของบทความนี้คือการอธิบายถึงเทศะทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏในงานของยุคลิดเท่านั้น จึงไม่จำเป็นจะต้องก้าวล่วงเข้าไปถึงทฤษฎีบทต่างๆ ซึ่งเป็นสาระเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์เพื่อหลีกเลี่ยงความซับซ้อน ผู้เขียนเพียงอธิบายวิธีการของยุคลิดโดยสังเขป ซึ่งยุคลิดใช้ทั้งนิยาม มูลบท และสัจพจน์ เป็นพื้นฐาน หลังจากนั้นยุคลิดพิสูจน์องค์ความรู้ต่างๆ ซึ่งขยายความต่อไปจากองค์ประกอบพื้นฐานทั้งสาม โดยประพจน์ที่เพิ่มเติมขึ้นมาจะต้องมีสมบัติหรือค่าความจริงที่สอดคล้องกับองค์ประกอบพื้นฐานเดิม หากผู้ศึกษาเรขาคณิตยอมรับส่วนที่เป็นพื้นฐานว่าเป็นจริง ประพจน์ต่างๆ ที่ขยายเพิ่มขึ้นมาโดยอาศัยตรรกะที่ไม่ขัดแย้งกับพื้นฐานเดิมก็จะต้องเป็นจริงด้วยเช่นกัน บ้างเรียกวิธีนี้ว่า Axiomatic Method ซึ่งมีข้อได้เปรียบตรงที่ นิยาม มูลบท และสัจพจน์ของยุคลิดล้วนมีลักษณะที่เรียบง่ายและเหมือนจะเป็นจริงในตัวเอง (จริงทางกายภาพในบางกรณีและจริงทางตรรกะในหลายกรณี) เมื่อใช้สิ่งเหล่านี้เป็นรากฐาน แล้วสานต่อด้วยข้อความหรือประพจน์ใหม่ที่มีตรรกะสืบเนื่องกัน ความสอดคล้องของตรรกะทำให้การปฏิเสธข้อความใหม่ๆ เป็นไปได้ยาก เมื่อระบบนี้ดำเนินต่อเนื่องไปจนได้องค์ความรู้หรือข้อสรุปบางอย่างที่เป็นทฤษฎีบทสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ ทั้งนี้ ยุคลิดพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสด้วยวิธีการเช่นนี้เอง

เนื้อหาทั้งหมดในหัวข้อนี้เป็นการนำองค์ประกอบที่สำคัญของเรขาคณิตแบบยุคลิด อันได้แก่นิยาม มูลบท และสัจพจน์ มาอธิบายให้เห็นว่า สิ่งเหล่านี้

เชื่อมโยงอย่างไรกับทิศทางคณิตศาสตร์ บทบาทของเทศะนี้เสมือนเป็นที่รองรับการดำรงอยู่ขององค์ประกอบต่างๆ และตรรกะที่เกี่ยวข้อง ภายใต้เทศะที่เป็นอนันต์ไม่มีข้อจำกัดทางกายภาพ ช่วยให้การมโนภาพตามสิ่งที่ยุคคิดบรรยายไว้สามารถทำได้ จนนำไปสู่การสร้างองค์ความรู้เป็นทฤษฎีในขั้นตอนถัดไป

ยุคคิดในมิติประวัติศาสตร์ภูมิปัญญา

ประเด็นปัญหาหนึ่งที่กล่าวมาแล้วและเป็นข้อพึงระลึกในทางประวัติศาสตร์คือ ยุคคิดไม่ได้เป็นที่จดจำในฐานะผู้ประดิษฐ์สร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์หรือเป็นผู้ให้กำเนิดความรู้ทางคณิตศาสตร์แขนงใดแขนงหนึ่ง หากประเมินวัดจากเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏใน *Elements* เทียบไม่ได้กับพีทาโกรัสที่สร้างทฤษฎีบทว่าด้วยสามเหลี่ยมมุมฉาก, เนเปียร์ (Napier) ผู้คิดค้นลอการิทึม, เดการ์ต (Descartes) ซึ่งสร้างพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) หรือนิวตันซึ่งเป็นผู้ให้กำเนิดแคลคูลัส (Calculus) จนโด่งดัง หลายครั้งด้วยซ้ำที่ชื่อของนักคณิตศาสตร์บางท่านผูกติดอยู่กับองค์ความรู้ที่ตนสร้างขึ้นมานั่นเอง

สำหรับ *Elements* ซึ่งวงการคณิตศาสตร์ทราบดีว่าเป็นผลงานรวบรวมความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีมาก่อนสมัยของยุคคิดเข้ามาไว้ด้วยกันและเรียบเรียงให้เป็นระบบ จึงจัดว่ายุคคิดได้อาศัยผลผลิตทางความคิดที่นักคณิตศาสตร์รุ่นก่อนที่สั่งสมและส่งผ่านต่อกันมาในอารยธรรมกรีก สถานะของยุคคิดจึงต่างจากนักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ตรงที่เขาไม่ได้เป็นผู้ประดิษฐ์คิดค้นทฤษฎีเฉพาะใดๆ หรือพิสูจน์ในสิ่งที่ผู้อื่นไม่รู้มาก่อน แต่บทความนี้ได้ชี้ให้เห็นแล้วว่า ความสำคัญของยุคคิดในประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์รวมทั้งเรขาคณิตคือการวางระบบวิธีคิดที่เป็นตรรกะ และการสร้างเทศะทางคณิตศาสตร์ขึ้นรองรับตรรกะทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ ในแง่หนึ่ง นวัตกรรมที่แท้จริงของยุคคิดคือ ส่วนของนิยาม มूलบท และสัจพจน์ แม้สิ่งเหล่านี้ไม่มีสถานะเป็นทฤษฎี แต่กลับมีความสำคัญไม่ยิ่งหย่อนไปกว่าการสร้างเนื้อหาทางทฤษฎีแม้แต่น้อย สำหรับอิทธิพลทางภูมิปัญญาที่สืบเนื่องไปจากผลงานของยุคคิดนั้น อาจพิจารณาได้ดังนี้

ประการแรก วิธีการของยุคคิดสร้างความแตกต่างอย่างมากกับวิธีการที่ใช้ในการศึกษาเรขาคณิตก่อนหน้าสมัยของเขา ความสนใจในเรขาคณิตเกิดขึ้น

ก่อนช่วงอายุของยุคลิดเนิ่นนานมาแล้ว และอาจจะมีมาก่อนอารยธรรมเมโสโปเตเมีย หรืออียิปต์เสียด้วยซ้ำ แต่ดังที่หยิบยกไว้ตอนต้นว่า เรขาคณิตในอารยธรรมก่อนหน้ากรีกมีลักษณะของการศึกษาด้วยวิธีอุปนัย (Induction) คือ การประมวลข้อเท็จจริงจำนวนมากจากประสบการณ์จนนำไปสู่ข้อสรุปเชิงทฤษฎี แต่ชาวกรีกสนใจความงามอันเที่ยงแท้กับวิธีการซึ่งมีลำดับถูกต้องทางตรรกะชัดเจนตามวิธีแบบนิรนัย (Deduction) การศึกษาเรขาคณิตของกรีกซ่อนนัยยะนี้ไว้อย่างดี ดังปรากฏในทฤษฎีบทของพีทาโกรัส, การหาสัดส่วนทองคำ (Golden Ratio) หรือกรณีของเพลโตซึ่งชื่อของเขาถูกจารึกไว้ในทรงตันเพลโต (Platonic Solid) งานเหล่านี้จึงเป็นตัวแทนความพยายามหาข้อสรุปเกี่ยวกับสมบัติที่เที่ยงแท้ตามแนวโน้มภูมิปัญญากรีก

ขณะที่ยุคลิดพยายามนำความรู้เรขาคณิตทั้งหมดของอารยธรรมกรีกมาไว้ภายใต้ระบบนิรนัยของเขา เพื่อให้องค์ความรู้เหล่านั้นผ่านการพิสูจน์โดยอาศัยองค์ประกอบที่เขาสร้างขึ้นคือ นิยาม มूलบท และสัจพจน์ ดังนั้น เทศะทางคณิตศาสตร์ที่ยุคลิดสร้างจึงเป็นสิ่งประดิษฐ์ทางภูมิปัญญาที่ทำให้วิธีนิรนัยซึ่งมีความสำคัญในวงการคณิตศาสตร์กรีกมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อนิยามและมूलบทเป็นจริงสม่ำเสมอมากเท่าไรภายใต้เทศะที่เป็นอนันต์ คุณค่าที่เกิดกับวิธีนิรนัยจะยิ่งมีมากขึ้นเท่านั้น เพราะเพิ่มความหนักแน่นให้กับระบบอ้างอิงทางตรรกะของวิธีนิรนัย ซึ่งจัดเป็นส่วนประกอบที่สำคัญยิ่งในการศึกษาคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตร์ก่อนหน้านี้ยุคคิดไม่ได้แสดงให้เห็นถึงความพยายามกำหนดนิยามให้จุด เส้น หรือมूलบท แต่พวกเขาศึกษาเรขาคณิตในแบบที่เป็นรูปธรรมมากกว่า เช่น วาดรูปทางเรขาคณิตขึ้นมาโดยไม่ต้องคิดว่ารูปนั้นสัมพันธ์กับเทศะหรือไม่ ไม่ต้องสนใจว่าควรแยกแยะองค์ประกอบพื้นฐานของรูปในระดับย่อยอย่างไรบ้าง สิ่งที่พวกเขาศึกษาจึงต้องการพื้นที่แต่ไม่ใช่เทศะทางคณิตศาสตร์ที่เป็นอนันต์แบบเดียวกับยุคลิด กรณียุคลิดจึงโดดเด่นกว่ามากในแง่ของการสถาปนาระบบตรรกะภายใต้เทศะทางคณิตศาสตร์

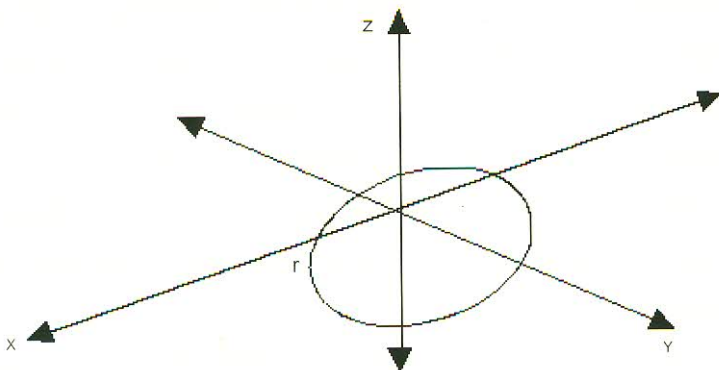
ประการที่สอง ระบบตรรกะที่ปรากฏในเทศะทางคณิตศาสตร์ภายใต้เรขาคณิตแบบยุคลิดสามารถกำหนดกรอบคิดเชิงนามธรรมไว้ในมโนภาพชุดเดียวกันได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยเทศะทางคณิตศาสตร์บวกกับนิยามและมूलบทต่างๆ ทำให้อัตถิยของผู้ศึกษามีส่วนกำหนดมโนภาพได้น้อยมาก การนิยามให้จุดไม่มีส่วนประกอบ เส้นตรงมีแต่ความยาว รวมทั้งมूलบทต่างๆ ทำให้มโนภาพของผู้อ่าน

เป็นไปอย่างเรียบง่าย เพราะนิยามได้บีบกรอบความคิดและมโนภาพไว้อย่างรัดกุม ลักษณะเช่นนี้มีใช้การบีบบังคับหากแต่เป็นการทำงานของระบบตรรกะ ความยั่งยืนของระบบนี้ในประวัติศาสตร์ภูมิปัญญาโดยไม่เผชิญการทำทลายเกือบสองพันปีเป็นเพราะสิ่งที่ยุคลิดวางรากฐานไว้นั้นง่ายต่อการถ่ายทอดความคิดเนื่องจากมีความเรียบง่ายในตัวเอง การคิดตามตรรกะที่เรียบง่ายหรือถูกต้องโดยแทบไม่ต้องพิสูจน์ทำให้โอกาสจะเกิดความเห็นแย้งมีน้อย ผู้ที่เริ่มต้นใหม่ก็จะคิดคล้อยตามได้ง่าย ผลในเชิงตรรกะวิธีเช่นนี้จึงทำให้วิธีการแบบยุคลิดรวมทั้ง *Elements* มีบทบาทยืนยาวในประวัติศาสตร์ (บาร์เกอร์, 2551; 26) กล่าวยกย่อง *Elements* ว่า “หนังสือที่ยิ่งใหญ่เล่มนี้เป็นงานนิพนธ์สมัยกรีกที่มีอิทธิพลมากที่สุดเล่มหนึ่งต่องานนิพนธ์ด้านความคิดของตะวันตกผ่านตลอดยุคโบราณ ยุคกลาง ยุคใหม่ มาจนถึงศตวรรษที่ 19 ...ไม่ได้เป็นแต่เพียงตำราเรขาคณิตเท่านั้น แต่ยังเป็นแบบแผนที่ควรเอาอย่างของการคิดแบบวิทยาศาสตร์อีกด้วย”

ประการที่สาม เทศะทั้งสองมิติและสามมิติซึ่งริเริ่มโดยยุคลิดมีบทบาทสูงมากในวิชาคณิตศาสตร์ จริงอยู่ที่เดการ์ตและผลงานบางชิ้นในช่วงการปฏิวัติวิทยาศาสตร์เข้ามามีส่วนสำคัญอย่างมากต่อการถือกำเนิดของคณิตศาสตร์สาขาที่เรียกว่าเรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry) แต่เรขาคณิตวิเคราะห์ไม่ใช่สิ่งใหม่ทั้งหมดในตัวของมันเอง ตามที่ยุคลิดเริ่มการมโนภาพถึงเทศะทางคณิตศาสตร์ที่เป็นอนันต์และเป็นเอกพันธ์ ซึ่งทำให้สมบัติต่างๆ ขององค์ประกอบทางเรขาคณิตดำรงอยู่ได้และเป็นจริงอย่างต่อเนื่องสม่ำเสมอภายใต้เทศะนั้น ภาคหลัง เรขาคณิตวิเคราะห์ได้เพิ่มส่วนประกอบอีกอย่างเข้าไป คือ พิกัดคาร์ทีเซียนหรือพิกัดฉาก (Rectangular Coordinates) ซึ่งถือเป็นสิ่งประดิษฐ์ที่ช่วยนำพีชคณิตมาเชื่อมโยงเข้ากับการสร้างรูปเรขาคณิตในระบบพิกัดฉาก ทำให้การศึกษาเกี่ยวกับเส้นโค้งและรูปเรขาคณิตโดยเฉพาะที่เกิดจากภาคตัดกรวย (Conic Section) ทำได้ง่ายขึ้น รวมไปถึงการประยุกต์ใช้เรขาคณิตวิเคราะห์กับความรู้วิทยาศาสตร์ เทศะทางคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งที่ริเริ่มโดยยุคลิดแล้วนักคณิตศาสตร์รุ่นหลังช่วยเพิ่มเติมศักยภาพในการวิเคราะห์ลงไป ดังภาพที่ 4 แสดงถึงการนำระบบพิกัดฉากเข้ามาวางลงในเทศะทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยแกนมุมฉาก (Rectangular Axes) เป็นเครื่องมือช่วยกำหนดระยะของจุด ดังนั้น จุดของยุคลิดที่เสมือนลอยอยู่ในเทศะ มาบัดนี้ถูกกำหนดค่าในรูป

ของพิกัดและใช้ศึกษาความสัมพันธ์ที่เป็นแบบแผน ดังเช่นรูปวงกลมเมื่อนำมาวางในระบบพิกัดมุมฉากแล้ว จุดต่างๆ บนรัศมีจะระบุในรูปของพิกัด (x,y) ได้และมีความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = r^2$

ภาพที่ 4 การวางระบบพิกัดมุมฉากในทิศทางคณิตศาสตร์



ประการที่สี่ อิทธิพลของทิศทางคณิตศาสตร์ตามแบบฉบับของยุคลิด ไม่ได้จำกัดขอบเขตในปริมาตรของวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่ยังมีอิทธิพลต่อแนวคิดปรัชญาและจักรวาลวิทยาอยู่ไม่น้อย โดย Hawking (Hawking, 2005: 4) กล่าวว่า ในช่วงรุ่งเรืองที่สุดของยุคแห่งนิวตัน (Newtonian Era) นักปรัชญาทั้งหลาย เช่น คานท์ (Emmanuel Kant) เป็นอาทิ ไม่เคยกังขาความจริงของมูลบทว่าด้วยเส้นขนาน พวกเขาเพียงตรวจสอบธรรมชาติของความจริงข้อนี้ว่ามีลักษณะแบบใด (ไม่ใช่ตรวจสอบสาระของมูลบท - ผู้เขียน) จริงอยู่ที่การปฏิวัติไอน์สไตน์ (Einsteinian Revolution) ทำให้ทราบว่า มูลบทเส้นขนานนี้ไม่ได้เป็นจริงไปตลอดในจักรวาล เพราะจักรวาลและเวลาแบบไอน์สไตน์เป็นเส้นโค้ง เรขาคณิตแบบยุคลิดกับฟิสิกส์แบบนิวตันเป็นแค่เพียงประมาณการ (Approximation) ของจักรวาลแบบนี้เท่านั้น

จากความข้างต้นสะท้อนให้เห็นถึงอิทธิพลทางภูมิปัญญาที่ยืมนานและแผ่กว้างของเรขาคณิตแบบยุคลิด โดยเฉพาะช่วงหลังจากการปฏิวัติวิทยาศาสตร์ ทั้งยังมีความสัมพันธ์กับฟิสิกส์แบบนิวตัน แม้ในที่สุดจะมีความรู้ใหม่ๆ จะเข้ามาท้าทาย แต่ยุคสมัยของยุคลิดนั้นทิ้งช่วงห่างจากการถือกำเนิดของเรขาคณิตนอก

แบบยุคลิด (Non-Euclidean Geometry) ในศตวรรษที่ 19 – 20 และช่วงชีวิตของ ไอน์สไตน์ราวสองพันปี กว่าที่จะพบว่าอวกาศมีความโค้งซึ่งทำให้เศษที่เป็นเอกพันธ์ แบบที่ยุคลิดเสนอไว้ไม่อาจคงความสม่ำเสมอไปได้ตลอดในระดับของจักรวาล รวมทั้ง ความโค้งของเศษยังทำให้ฟิสิกส์แบบนิวตันสูญเสียความแม่นยำในการอธิบาย ปรากฏการณ์ระดับจักรวาลด้วย แต่ถึงแม้จะมีข้อเท็จจริงเหล่านี้เกิดขึ้นหรือแม้จะ มีการสร้างเรขาคณิตบนระบบยุคลิดขึ้นมาแล้วก็ตามที ระเบียบวิธีทางตรรกะและ มโนภาพเกี่ยวกับเศษทางคณิตศาสตร์ตามแบบฉบับของยุคลิด (รวมทั้งฟิสิกส์ แบบนิวตัน) ก็ยังคงเป็นพื้นฐานของการศึกษาเรขาคณิตในโลกปัจจุบันตั้งแต่ประถม จนถึงมหาวิทยาลัย นี่ย่อมหมายความว่า องค์ความรู้แบบยุคลิดซึ่งแม้จะเป็นเพียง ประมาณการเกี่ยวกับเศษหรืออวกาศ แต่ในแง่ของการประยุกต์ใช้ยังถือเป็นสิ่งที่ ใช้งานได้ในการศึกษาเรขาคณิตดังที่กระทำมาตลอดระยะเวลาสองพันกว่าปีมานี้

ในเชิงประวัติศาสตร์ภูมิปัญญา ขบขความคิดใดๆ ที่สามารถดำรงอยู่อย่าง ยาวนานย่อมเป็นสิ่งที่ล้ำค่าในทางภูมิปัญญา เรขาคณิตแบบยุคลิดมีคุณลักษณะ เช่นนั้น ยิ่งในกรณีที่เราขคณิตแบบยุคลิดเคยถูกท้าทายด้วยทฤษฎีที่ใหม่กว่า แต่ กลับกลายเป็นว่าเรขาคณิตแบบยุคลิดไม่ได้สูญสลายไป หากแต่ยังคงถูกนำไปสอน ในห้องเรียนและใช้เป็นแบบแผนในการศึกษาคณิตศาสตร์จวบจนทุกวันนี้ นี่ย่อม แสดงให้เห็นว่า เรขาคณิตแบบยุคลิดเป็นภูมิปัญญาที่ยากแก่การละทิ้งหรือยังคง สามารถรักษาความโดดเด่นอันเป็นแบบฉบับของตนไว้ได้ ทำให้คนรุ่นหลังไม่เห็น ความจำเป็นจะต้องปฏิเสธองค์ความรู้ชุดนี้ไปเสียทั้งหมด ที่กล่าวมานี้จึงน่าจะมีคุณค่า เพียงพอให้ถือเอาเรขาคณิตแบบยุคลิดเป็นปรากฏการณ์ครั้งสำคัญในประวัติศาสตร์ ภูมิปัญญาของมนุษย์ได้

บทสรุป

จากการศึกษาเนื้อหาของ *Elements* เท่าที่หยิบยกมาซึ่งจัดว่าเป็น ส่วนน้อยมากๆ ของผลงานที่ยิ่งใหญ่ชิ้นนี้ แต่การวิเคราะห์ที่ผ่านมาเพียงพอให้สรุป ได้ว่า ความโดดเด่นทางภูมิปัญญาของ *Elements* อยู่ที่การสร้างเศษทางคณิตศาสตร์ ขึ้นมาได้สำเร็จ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเป็นแง่มุมที่มีคุณค่ามากกว่าทฤษฎีและการพิสูจน์ ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ใน *Elements* เสียอีก เพราะการสร้างเศษนี้ขึ้นมาได้โดย

ระบบตรรกะและวิธีการแบบยุคลิดเข้ากับมโนภาพว่าด้วยปริภูมิที่เป็นอนันต์และดำรงความสม่ำเสมอของตรรกะไปจรดอาณาเขตของมัน ซึ่งนัยสำคัญของตรรกะและทิศทางคณิตศาสตร์แบบนี้คือส่วนที่ทำให้ภูมิปัญญาของยุคลิดยืนหยัดได้ยาวนานในประวัติศาสตร์ โดยเฉพาะเป็นรากฐานสำคัญให้กับวิธีการแบบนิรนัย

อันที่จริง สิ่งที่ยุคลิดเสนอไว้ใน *Elements* ถือกันว่าเป็นหนึ่งในแม่แบบของการเสนอความคิดที่เป็นการอ้างเหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) หรือการพิสูจน์แบบนิรนัย (Deductive Proof) สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์แบบนี้เรียกว่าเป็นสิ่งที่จริงโดยจำเป็น (Necessarily True) ทั้งนี้ ทั้งกระบวนการคิดและผลการพิสูจน์นั้นไม่เกี่ยวอะไรกับโลกภายนอกแม้แต่น้อย ทิศทางคณิตศาสตร์จึงไม่มีสมบัติเชิงประจักษ์ (Empirical Properties) ไม่เหมือนกับวัตถุที่เป็นรูปธรรมซึ่งมีมิติตั้งแต่ 2-3 มิติ มรดกทางความคิดของยุคลิดจึงเป็นฐานรองรับการอ้างเหตุผลทางความคิดมากกว่าจะรองรับสิ่งที่เป็จริงในเชิงประจักษ์

ในแง่หนึ่งทิศทางคณิตศาสตร์เป็นเรื่องของความคิดนามธรรม มโนภาพหรือจินตนาการ ซึ่งไม่อาจพิสูจน์การมีอยู่ในเชิงประจักษ์ โดยเฉพาะเมื่อผู้จินตนาการเป็นบุคคลคนละคนกันแล้ว ย่อมไม่อาจมั่นใจได้ว่ามโนภาพของแต่ละคนจะเหมือนกัน แต่ทิศทางคณิตศาสตร์ทำให้นามธรรมที่ระบบตรรกะของยุคลิดควบคุมไว้มีโอกาสผันแปรน้อยมากภายใต้อัตวิสัย ความเรียบง่ายของตรรกะและสมบัติต่างๆ ทางเรขาคณิตที่ถูกกำหนดขึ้นมานั้นเองที่ทำให้ขั้นตอนการคิดต้องดำเนินไปตามมโนภาพที่ยุคลิดวางเอาไว้อย่างเข้มงวด การวางรากฐานระบบดังกล่าวได้กลายเป็นพื้นฐานการเรียนเรขาคณิตจวบจนปัจจุบัน ถือเป็นคุณลักษณะของระเบียบวิธีในการศึกษาคณิตศาสตร์ (โดยเฉพาะเรขาคณิต) ที่จัดได้ว่ามีประสิทธิภาพสูงมาก ตลอดจนเป็นจุดแข็งให้เกิดการนำตรรกะและความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือวิเคราะห์เรื่องอื่นๆ ต่อไปได้อย่างเป็นสากล บทบาทและความสำคัญของเรขาคณิตแบบยุคลิดที่ได้สร้างทิศทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาเอง ถือเป็นแง่มุมที่ใช้งานมากกว่าประเด็นอื่นใดในผลงานของเขาและกลายเป็นผลผลิตที่ทรงอิทธิพลทางภูมิปัญญายาวนานที่สุดเรื่องหนึ่งในประวัติศาสตร์ของมนุษย์

บรรณานุกรม

- บาร์เกอร์, สตีเฟน เอฟ. (2551). *ปรัชญาคณิตศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 2, แปลโดย สิริเพ็ญ
พริยจิตรกรกิจ). กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ.
พิพัฒน์ พสุธารชาติ. (2544). *ปลายทางที่ ∞*. กรุงเทพฯ: เคล็ดไทย.
ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). *พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*
(พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.
- Boyer, C. B., and Merzbach, U. C. (1989). *A history of mathematics* (2nd ed.).
New York: Wiley.
- Bulmer-Thomas, I. (1991). Euclid. In: *Biographical dictionary of mathematics:
reference biographies from the dictionary of scientific biography*
(Vol 2). New York: Seribner, pp.689-711.
- Hawking, S. (ed.). (2005). *God created the integers: The mathematical
breakthroughs that changed history*. London: Penguin Books.
- Reed, D. (1995). *Figures of thought: Mathematics and mathematical texts*.
London: Routledge.
- The American heritage college dictionary* (3rd ed.). (1993). Boston:
Houghton Mifflin.