การวิเคราะห์การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องความยาว ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1

ANALYZING MATHEMATICAL KNOWLEDGE DEVELOPMENT IN LENGTH MEASUREMENT AMONG FIRST-GRADE STUDENTS

พิมพ์ลักษณ์ มูลโพธิ์*
Pimlak Moonpo
กาญจนา เวชบรรพต
Kanjana Wetbunpot
มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ จังหวัดปทุมธานี
Valaya Alongkorn Rajabhat University under the Royal Patronage Pathum Thani
*Corresponding Author E-mail: pimlak@vru.ac.th
Received February 25, 2026; **Revised** July 29, 2026; **Accepted** August 18, 2026

บทคัดย่อ

การวิจัยเชิงคุณภาพนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องความยาวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ผ่านการจัดลำดับงาน (Task Sequence) อย่างเป็นระบบ พื้นที่วิจัยคือโรงเรียนขนาดเล็กในจังหวัดปทุมธานี กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 5 คน เครื่องมือวิจัยประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 4 แผนที่ออกแบบตามแนวทาง การสอนด้วยวิธีการแบบเปิด (Open Approach) โดยใช้หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ประเทศญี่ปุ่นเป็นแหล่งข้อมูลหลัก เก็บข้อมูลโดยการบันทึกวีดิทัศน์ สังเกตการสอน สัมภาษณ์ และวิเคราะห์ผลงานนักเรียน แล้วนำมาวิเคราะห์เนื้อหาตามระบบรหัส 3 มิติ ได้แก่ มิติความรู้ทางคณิตศาสตร์ มิติกระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ และมิติลำดับงาน

ผลการวิจัย พบว่า การจัดลำดับงานมีผลโดยตรงต่อการพัฒนาความรู้ของผู้เรียนในลักษณะเส้นทางการเรียนรู้แบบเกลียว ความรู้แจ้ง (Conceptual Knowledge) และความรู้เชิงวิธีการ (Procedural Knowledge) ไม่ได้พัฒนาแยกส่วนกัน แต่เติบโตควบคู่กันไปแบบวนซ้ำ (Iterative) โดยกระบวนการพัฒนาแบ่งเป็น 3 ระยะสำคัญ ได้แก่ 1) การเปรียบเทียบโดยตรง นักเรียนจัดการวัตถุทางกายภาพให้เข้าสู่เงื่อนไขคณิตศาสตร์ (Horizontal Mathematization) เช่น การจัดจุดเริ่มต้นให้เสมอกัน 2) การเปรียบเทียบทางอ้อม เป็นจุดเปลี่ยนผ่านสำคัญที่นักเรียนเริ่มใช้สื่อกลางที่ไม่เป็นทางการเพื่อแก้ปัญหาข้อจำกัดทางกายภาพ และ 3) การใช้เครื่องมือมาตรฐาน นักเรียนพัฒนาสู่ระบบคณิตศาสตร์ (Vertical Mathematization) โดยเชื่อมโยงแนวคิดสื่อกลางไปสู่การใช้ไม้บรรทัดองค์ความรู้ใหม่ชี้ให้เห็นว่า การกำหนดหน่วย (Unitization) เป็นจุดเปลี่ยนสำคัญที่ทำให้นักเรียนข้ามจากการจัดการโลกกายภาพเข้าสู่ระบบคณิตศาสตร์

คำสำคัญ: ความรู้ทางคณิตศาสตร์, การวัดความยาว, ลำดับงาน, การทำให้เป็นคณิตศาสตร์, วิธีการแบบเปิด

Abstract

This qualitative case study aimed to analyze the development of mathematical knowledge of length measurement among first-grade students through a systematic task sequence. The study was conducted at a small school in Pathum Thani province with five first-grade students as participants. The research instruments included four lesson plans designed using the open approach, with Japanese mathematics textbooks as the primary resource. Data were collected through video recordings, classroom observations, semi-structured interviews, and student work analysis. The data were then subjected to content analysis based on a three-dimensional coding scheme: mathematical knowledge, mathematization, and task sequence.

The study revealed that task sequencing directly influenced students' knowledge development through a spiral learning progression. Conceptual and procedural knowledge did not develop in isolation but rather grew simultaneously in an iterative model. The developmental process consisted of three key phases: 1) Direct Comparison, where students manipulated physical objects to meet mathematical conditions (Horizontal Mathematization), such as aligning starting points, 2) Indirect Comparison, a critical transition where students utilized non-standard mediators to overcome physical constraints, and 3) Standard Tools, where students advanced into the mathematical system (Vertical Mathematization) by linking mediator concepts to ruler usage. The study suggests that unitization is the pivotal turning point enabling students to transition from physical manipulation to formal mathematical systems.

Keywords: mathematical knowledge, length measurement, task sequence, Mathematization, open approach

บทนำ

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Knowledge) เป็นโครงข่ายองค์ความรู้ที่เชื่อมโยงกันอย่างแนบแน่น ระหว่างความรู้แจ้ง (Conceptual Knowledge) และ ความรู้เชิงวิธีการ (Procedural Knowledge) ซึ่งไม่ใช่เพียงข้อเท็จจริงหรือขั้นตอนที่แยกส่วนกัน แต่เป็นองค์ประกอบสำคัญในการพัฒนาความเข้าใจที่แท้จริง (Hussein, 2022) การพัฒนาทั้งสองส่วนควบคู่กันจะส่งผลบวกต่อความสามารถทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน (Rittle-Johnson & Schneider, 2014) โดยความเข้าใจในความหมายของความรู้ (ความรู้แจ้ง) จำเป็นต้องอาศัยขั้นตอนการปฏิบัติ (ความรู้เชิงวิธีการ) เพื่อสร้างความหมายที่สมบูรณ์ให้แก่ผู้เรียน (Isoda & Olfos, 2021) การส่งเสริมความรู้ทั้งสองส่วนให้พัฒนาไปพร้อมกันจึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่ง

การวัดความยาวเป็นแนวคิดพื้นฐานที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตและการวัดในระดับประถมศึกษา (Smith et al., 2016; Clements & Sarama, 2020) และเป็นรากฐานสู่การเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงและการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน (Barrett et al.,

2017) อย่างไรก็ตาม ผลการประเมิน TIMSS 2011 พบว่า นักเรียนไทยชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 มีคะแนนเฉลี่ยด้านการวัดเพียง 437คะแนน ซึ่งต่ำกว่าครึ่ง (500 คะแนน) โดยเฉพาะในเรื่องการวัดและเรขาคณิต (Mullis et al., 2012) แม้การพัฒนาความเข้าใจเรื่องความยาวในช่วงประถมศึกษาตอนต้นจะมีความสำคัญสูง (Sarama & Clements, 2016) และมีการเสนอแนวคิด ลำดับงาน (Task Sequence) ที่เป็นระบบเพื่อพัฒนาความรู้ (Isoda & Katagiri, 2012) แต่ยังคงขาดการศึกษาถึงการนำไปใช้ที่เป็นรูปธรรมในบริบทของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในประเทศไทย

สภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องความยาวประสบปัญหาหลายประการ งานวิจัยในต่างประเทศแสดงให้เห็นว่า นักเรียนมักมีความเข้าใจคลาดเคลื่อน เช่น การนับขีดเครื่องหมายบนไม้บรรทัดแทนการวัดระยะห่าง (Sisman & Aksu, 2016) ในประเทศไทยเองยังพบว่า ครูผู้สอนส่วนใหญ่ยังขาดความเข้าใจในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ที่เป็นลำดับขั้นตอนอย่างเป็นระบบ (Inprasitha, 2019) ส่งผลให้นักเรียนระดับประถมศึกษามีค่าเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการวัดและเรขาคณิตต่ำกว่าครึ่ง (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2567)

บทความวิจัยนี้จึงนำเสนอการพัฒนาลำดับงานที่เหมาะสมสำหรับการสอนเรื่องความยาวในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และวิเคราะห์กระบวนการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ผ่านลำดับ งานที่ออกแบบขึ้น เพื่อเป็นประโยชน์ต่อครูผู้สอนในการออกแบบกิจกรรมที่ส่งเสริมความเข้าใจ เชิงมโนทัศน์ และเป็นแนวทางในการพัฒนาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา รวมถึงการขยายองค์ความรู้เกี่ยวกับการประยุกต์ใช้แนวคิดลำดับงานในบริบทการศึกษาไทยต่อไป

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อวิเคราะห์การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องความยาวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1

การทบทวนวรรณกรรม

1. ความรู้ทางคณิตศาสตร์

ความรู้ทางคณิตศาสตร์แบ่งเป็น 2 ประเภท แม้มักจะถูกแยกศึกษาแต่กลับมีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด (Braithwaite & Sprague, 2021) ประกอบด้วย 1) ความรู้เชิงวิธีการ (Procedural Knowledge) ซึ่งหมายถึง ความคล่องแคล่วและเข้าใจขั้นตอนแบบ "Knowing how" (Hiebert & Lefevre, 1986; Star, 2005; Rittle-Johnson & Schneider, 2014; Anderson, 1993) ซึ่งถ้าหากมีการปรับใช้อย่างยืดหยุ่นจะช่วยลดภาระทางปัญญาและเพิ่มความรวดเร็วแม่นยำ (Baroody & Dowker, 2003; Geary, 2004; Canobi, 2009) อย่างไรก็ตาม การท่องจำวิธีโดยขาดความเข้าใจจะเป็นอุปสรรคในระยะยาว (Pesek & Kirshner, 2000) 2) ความรู้แจ้ง (Conceptual Knowledge) หมายถึง ความเข้าใจเชิงลึกในโครงข่ายหลักการ (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson et al., 2001) ช่วยให้ตัดสินใจอย่างมีเหตุผล (Crooks & Alibali, 2014) เป็นองค์ประกอบสำคัญทางคณิตศาสตร์ (National Research Council [NRC], 2001) ทั้งสองส่วนนี้จะพัฒนาควบคู่กันไปแบบวนซ้ำ (Iterative) และมีความสัมพันธ์ส่งเสริมกันแบบสองทิศทาง (Bidirectional) โดยความรู้แจ้งจะช่วยสร้างความหมายให้วิธีการ และในขณะเดียวกันการฝึกใช้วิธีการช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจมโนทัศน์ได้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Baroody & Lai, 2007)

2. แนวคิดทฤษฎีในการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์

2.1 Mathematization (การทำให้เป็นคณิตศาสตร์)

ตามแนวคิดของ Freudenthal (2002) กระบวนการนี้คือการที่ผู้เรียนแปลงสถานการณ์จริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบ่งเป็น 2 ระดับ คือ การแปลงปัญหาจริงเป็นปัญหาคณิตศาสตร์ (horizontal mathematization) และการพัฒนาความรู้คณิตศาสตร์ภายในระบบคณิตศาสตร์เอง (vertical mathematization) แนวคิดนี้ถูกนำมาใช้ในกลุ่ม Realistic Mathematics Education (RME) เพื่อให้ผู้เรียนสร้างความหมายของความรู้ด้วยตนเองผ่านบริบทที่สำคัญ (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014; Gravemeijer, 1994)

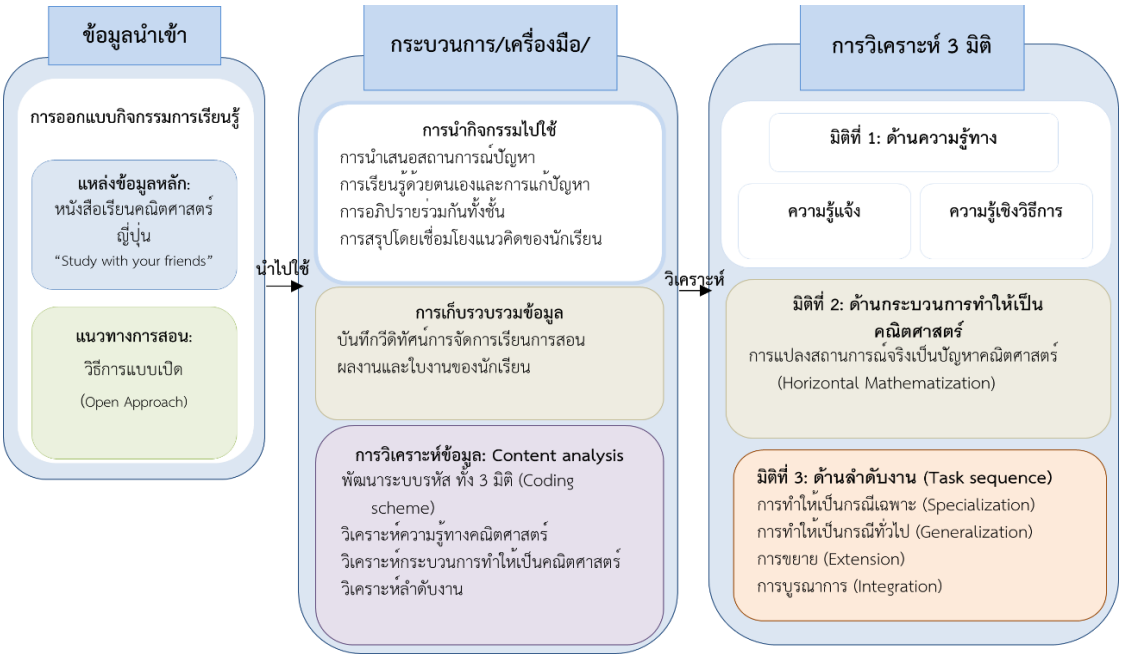
2.2 ลำดับงาน (Task Sequence)

การจัดลำดับกิจกรรมอย่างเป็นระบบเพื่อพัฒนาความเข้าใจแบบค่อยเป็นค่อยไป (Isoda & Katagiri, 2012) โดยมีแนวคิดสนับสนุน เช่น Hypothetical Learning Trajectory (HLT) (Simon, 1995) และการสร้างความหลากหลาย (Variation) (Watson & Mason, 2006) ลำดับงานตามแนวคิดของ Isoda and Katagiri (2012) แบ่งเป็น 4 ลักษณะสำคัญ ได้แก่ 1) การทำให้เป็นกรณีเฉพาะ (Specialization) ซึ่งเริ่มจากสถานการณ์เฉพาะที่นักเรียนคุ้นเคย 2) การทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Generalization) สังเกตและเชื่อมโยงกรณีเฉพาะ ไปสู่หลักการทั่วไป เพื่อให้เข้าใจเหตุผลเบื้องหลัง 3) การขยาย (Extension) เปลี่ยนเงื่อนไขปัญหาเดิมเล็กน้อยเพื่อขยายขอบเขตความรู้ 4) การบูรณาการ (Integration) ผสานหลักการหลายเรื่องเพื่อค้นพบสาระสำคัญใหม่

งานวิจัยนี้ออกแบบกิจกรรมตามแนวทางการสอนด้วยวิธีการแบบเปิด (Open Approach) เรื่องความยาวสำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้หนังสือเรียนญี่ปุ่น (Study with your friends) เป็นแหล่งข้อมูลในการออกแบบ วิเคราะห์มิติการพัฒนาความรู้ กระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์และลำดับงาน โดยเน้นการทำความเข้าใจความสัมพันธ์แบบวนซ้ำระหว่างความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการ (Rittle-Johnson & Alibali, 1999) ซึ่งยังมีการศึกษาน้อยในบริบทประเทศไทย

กรอบแนวคิดการวิจัย

งานวิจัยนี้ เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยกำหนดกรอบแนวคิดการวิจัยตามแนวคิดของ Hiebert and Lefevre (1986), Baroody and Dowker (2003), Freudenthal (2002) และ Isoda and Katagiri (2012) ประกอบด้วยมิติด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ มิติด้านกระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ และมิติด้านลำดับงาน ดังนี้



แผนภาพที่ 1 แสดงกรอบแนวคิดในการวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยเชิงคุณภาพรูปแบบกรณีศึกษานี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องความยาวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนด้วยวิธีการแบบเปิด โดยใช้การวิจัยเชิงปฏิบัติการแบบมีส่วนร่วมที่ผู้วิจัยเป็นทั้งผู้สอนและผู้สังเกตตามแนวคิดของ Kemmis and McTaggart (2005) ดำเนินการในโรงเรียนขนาดเล็กในจังหวัดปทุมธานี โรงเรียนตั้งอยู่ในพื้นที่กึ่งเมืองกึ่งชนบท มีบริบทที่เอื้อต่อการจัดการเรียนการสอนแบบกลุ่มเล็กทำให้สามารถสังเกตและติดตามพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนได้อย่างใกล้ชิด ผู้ให้ข้อมูลหลัก (Key informants) คือ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 5 คน อายุระหว่าง 6-7 ปี ที่มีผลการเรียนหลากหลายและสื่อสารในระดับที่สามารถให้ข้อมูลได้ ใช้วิธีการเลือกแบบเจาะจง (Purposive Sampling) ตามเกณฑ์การคัดเข้า (Inclusion Criteria) คือ เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่ลงทะเบียนเรียนในปีการศึกษา 2566 มีผลการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่หลากหลาย มีการเข้าเรียนสม่ำเสมอไม่น้อยกว่า 80% ของเวลาเรียนทั้งหมด ผู้มีส่วนร่วมในการวิจัยประกอบด้วย นักวิจัยหลัก 2 คน ทำหน้าที่เป็นผู้สอนร่วม (Co-teachers) และผู้สังเกต นักศึกษาครู 3 คน ทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนร่วมและผู้ช่วยวิจัยจำนวน 1 คนและเป็นผู้ช่วยวิจัยจำนวน 2 คน และครูประจำชั้น เป็นผู้ให้คำปรึกษาและสนับสนุนข้อมูลพื้นฐานของนักเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย 2 ชนิด คือ 1) เครื่องมือสำหรับการจัดการเรียนการสอน ได้แก่แผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 4 แผน (4 ชั่วโมง) เนื้อหาเรื่องความยาว สื่อและอุปกรณ์การเรียนรู้ ซึ่งพัฒนาขึ้นด้วยกระบวนการการศึกษาชั้นเรียน (lesson study) ที่กลุ่มผู้วิจัย นักศึกษาครู และครูประจำชั้นร่วมกันออกแบบโดยใช้บริบทเกี่ยวกับผู้เรียนและหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ของประเทศญี่ปุ่นมาเป็นแหล่งข้อมูลหลักในการออกแบบเครื่องมือวิจัยประกอบด้วยแผนการเรียนรู้ 4 แผน และเครื่องมือเก็บข้อมูลที่ผ่านการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ได้แก่ แบบสังเกต (IOC 0.67-1.00) แบบสัมภาษณ์ (IOC 0.67-1.00)

และแบบวิเคราะห์ผลงาน (IOC 0.67-1.00) ข้อมูลถูกเก็บรวบรวมในเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2567 ผ่านวีดิทัศน์ การสังเกต และสัมภาษณ์ จากนั้นนำมาถอดความแบบคำต่อคำ จัดระบบข้อมูลโดยปกปิดรหัสตัวตนนักเรียน และวิเคราะห์เนื้อหา (Content analysis) โดยผู้วิจัย 2 คนที่ลงรหัสอย่างเป็นอิสระต่อกัน พร้อมสุ่มตรวจสอบความถูกต้อง 30% เพื่อนำมาเขียนบรรยายเชิงพรรณนาถึงการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 3 มิติ

ผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพผ่านการสังเกตชั้นเรียนและการถอดบทสนทนา (Protocol Analysis) ในคาบเรียนเรื่องการเปรียบเทียบความยาว ประกอบกับการสัมภาษณ์ พบว่า การจัดลำดับงาน (Task Sequence) มีผลโดยตรงต่อการกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดพัฒนาการทางความรู้และการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematization) โดยสามารถสรุปผลการวิจัยแบ่งตามพัฒนาการเรียนรู้ได้ 3 ระยะ ดังนี้

1. การสร้างมโนทัศน์เรื่องการเปรียบเทียบโดยตรง (Direct Comparison)

นักเรียนแสดงให้เห็นถึงการก่อรูปความรู้พื้นฐานเมื่อนักเรียนเผชิญกับงานแบบกรณีเฉพาะ (Special Case) และงานแบบการทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Generalization) โดยสามารถสรุปได้ว่าเงื่อนไขที่จำเป็นของการเปรียบเทียบความยาว คือ การมีจุดเริ่มต้นที่เสมอกัน และวัตถุต้องอยู่ในแนวเส้นตรง (ตึง) โดยมีหลักฐานเชิงประจักษ์ คือ เมื่อครูปิดจุดเริ่มต้นและแกว่งหลอดไปมา นักเรียนตระหนักว่าไม่สามารถเปรียบเทียบได้ทันที นำไปสู่การแก้ปัญหาโดยนำหลอดไปวางบนพื้นโต๊ะ เพื่อจัดจุดเริ่มต้นให้เท่ากัน และนักเรียนค้นพบว่า ต้องดึงริบบิ้นให้ตึงและจับปลายข้างหนึ่งให้เท่ากัน จึงจะเปรียบเทียบได้ถูกต้อง สถานการณ์นี้สะท้อนให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้แจ้ง (Conceptual Knowledge) เรื่องเงื่อนไขการวัด ซึ่งนำไปสู่ความรู้เชิงวิธีการ (Procedural Knowledge) ในการจัดการวัตถุสอดคล้องกับกระบวนการ Horizontal Mathematization ที่ผู้เรียนสามารถแปลงวัตถุทางกายภาพ ให้เข้าสู่เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ได้สำเร็จ



แผนภาพที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบความยาวหลอดและความริบบิ้นของนักเรียน

2. การเปลี่ยนผ่านสู่การเปรียบเทียบทางอ้อมโดยใช้สื่อกลาง (Indirect Comparison)

เมื่อนักเรียนเผชิญกับสถานการณ์ที่ไม่สามารถนำวัตถุมาทาบกันได้โดยตรง (เช่น การวัดด้านกว้างและยาวของวัตถุชิ้นเดียว) นักเรียนสามารถเกิดแนวคิดเรื่องการใช้สื่อกลางได้เอง โดยมีหลักฐานเชิงประจักษ์ ในกรณีของการเปรียบเทียบด้านกว้างและด้านยาวของการ์ด (มีลักษณะแข็ง พับไม่ได้) คือ นักเรียนไม่สามารถหักการ์ดเพื่อมาเทียบด้านกว้างกับด้านยาวได้ จึงแก้ปัญหาโดยการนำปากกาเมจิกมาทาบเพื่อเป็นตัวกลางในการส่งต่อความยาว ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนเกิดความรู้แจ้งว่า การเปรียบเทียบโดยตรงทำไม่ได้ นำไปสู่ความรู้เชิงวิธีการในการหาเครื่องมืออื่นมาช่วยเป็นการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนขึ้นผ่านการจัดการข้อจำกัดทางกายภาพ (Horizontal Mathematization)



แผนภาพที่ 3 แสดงภาพการ์ดและการนำปากกามาเป็นสื่อกลางในการเปรียบเทียบของนักเรียน

3. การเชื่อมโยงสู่เครื่องมือมาตรฐานและระบบคณิตศาสตร์ (Vertical Mathematization)

นักเรียนแสดงให้เห็นพัฒนาการขั้นสูง เมื่อนักเรียนต้องประยุกต์ใช้ความรู้ในบริบทใหม่และเริ่มใช้เครื่องมือที่เป็นทางการ โดยนักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดจากสื่อกลางที่ไม่เป็นทางการ (ปากกา) ไปสู่เครื่องมือมาตรฐาน (ไม้บรรทัด) แต่ยังพบความเข้าใจคลาดเคลื่อนเรื่องสเกลและจุดเริ่มต้น ซึ่งสามารถแก้ไขได้ผ่านการอภิปรายร่วมกัน หลักฐานเชิงประจักษ์ที่สะท้อนความเข้าใจนี้ของนักเรียน คือ ในกรณีของการเปรียบเทียบหนังสือปกแข็ง นักเรียนเชื่อมโยงวิธีการจากการ์ดปีใหม่มาใช้กับหนังสือ แต่เปลี่ยนเครื่องมือเป็นไม้บรรทัด พบประเด็นที่น่าสนใจ คือ นักเรียนบางคนสับสนเรื่อง จุดเริ่มต้นของการวัด และการใช้หน่วยที่ต่างกันบนไม้บรรทัดเดียวกัน แต่เพื่อนนักเรียนสามารถช่วยกันตรวจสอบและอธิบายหลักการที่ถูกต้องได้ ซึ่งถือเป็นจุดเปลี่ยนที่สำคัญจาก Horizontal Mathematization ไปสู่ Vertical Mathematization คือการพัฒนาความรู้ ภายในระบบคณิตศาสตร์เอง (การจัดการกับระบบหน่วยวัด ตัวเลข และสเกลบนไม้บรรทัด) โดยนักเรียนแสดงให้เห็นถึงความรู้แจ้งและวิธีการที่ซับซ้อนขึ้น



แผนภาพที่ 4 แสดงการใช้ไม้บรรทัดเป็นเครื่องมือเปรียบเทียบความยาวของนักเรียน

ผู้วิจัยได้สรุปตารางการวิเคราะห์ข้อมูลทั้ง 4 คาบ ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1 แสดงผลการวิเคราะห์ลำดับงาน พัฒนาการความรู้ และการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนรู้ ตามแผนจำนวน 4 คาบ

คาบที่	ลำดับงาน	พัฒนาการความรู้		การทำให้เป็นคณิตศาสตร์
		ความรู้แจ้ง	ความรู้เชิงวิธีการ	
1	งานแบบการทำให้เป็นกรณีทั่วไป	(C1) การเปรียบเทียบต้องจัดการวัตถุให้มีจุดเริ่มต้นเดียวกันและให้ยืดตรง	กำหนดจุดเริ่มต้นให้ตรงกัน ดึงให้ตึงแล้วจึงเปรียบเทียบ (P2)	จัดการวัตถุจริงในโลกกายภาพให้เข้าสู่เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์
	งานแบบขยาย	(C2) การใช้สื่อกลางเป็นเครื่องมือในการเปรียบเทียบความยาว (การเปรียบเทียบทางอ้อม)	นำเครื่องมืออื่นมาเป็นสื่อกลางในการเปรียบเทียบความยาว (P3)	จัดการวัตถุจริงในโลกกายภาพให้เข้าสู่เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์
	งานแบบการทำให้เป็นกรณีทั่วไป	(C2) การใช้สื่อกลางเป็นเครื่องมือในการเปรียบเทียบความยาว	นำเครื่องมืออื่นมาเป็นสื่อกลางในการเปรียบเทียบความยาว (P3)	จัดการวัตถุจริงในโลกกายภาพให้เข้าสู่เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์และพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ภายในระบบคณิตศาสตร์
2	งานแบบบูรณาการ	การเปรียบเทียบความยาวของวัตถุมากกว่า 2 สิ่งที่ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้โดยตรง (direct comparison) สามารถนำสิ่งอื่นมาเป็นสื่อกลางในการวัดเพื่อเปรียบเทียบความยาวได้ (indirect	ลงมือนำสื่อกลางหลายอันมาจัดเรียงเพื่อให้มีจุดเริ่มต้นเดียวกันจนสามารถเปรียบเทียบความยาวได้ (P4)	แปลงสถานการณ์จริงเป็นปัญหาคณิตศาสตร์ โดยสามารถจัดการกับวัตถุจริงในโลกกายภาพ ให้เข้าสู่เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ภายในระบบคณิตศาสตร์

คาบที่	ลำดับงาน	พัฒนาการความรู้		การทำให้เป็นคณิตศาสตร์
		ความรู้แจ้ง	ความรู้เชิงวิธีการ	
		comparison) (C2) และ สื่อกลางสามารถมีหลายอันและนำมาเปรียบเทียบกันได้โดยตรง (C1)		
3	งานแบบกรณีเฉพาะ	การกำหนดหน่วย (ช่องสี่เหลี่ยม) ที่ใกล้เคียงหน่วยมาตรฐาน (เซนติเมตร) เป็นตัววัดความยาว (C3)	เปรียบเทียบความยาวโดยนับจำนวนหน่วยที่กำหนดขึ้น (P5)	พัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ภายในระบบคณิตศาสตร์
	งานแบบบูรณาการ	การกำหนดหน่วย (ช่องสี่เหลี่ยม) ที่ใกล้เคียงหน่วยมาตรฐาน (เซนติเมตร) เป็นหน่วยในการวัด (C3) โดย จุดเริ่มต้นของการวัดอยู่ที่ช่องใดก็ได้ (C4)	เปรียบเทียบความยาวโดยนับจำนวนหน่วยที่กำหนดขึ้น (P5) โดยจุดเริ่มต้นของการวัดอยู่ที่ช่องใดก็ได้ (P6)	พัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ภายในระบบคณิตศาสตร์
4	งานแบบบูรณาการ	การกำหนดหน่วยในการวัดอื่น ๆ ที่ไม่เป็นมาตรฐาน (ห่วงกระดาษ) (C3) และการใช้หน่วยที่กำหนดขึ้นเป็นตัววัดความยาว (C5)	เปรียบเทียบความยาวโดยนับจำนวนหน่วยที่สร้างขึ้น (P5) โดยจุดเริ่มต้นของการวัดอยู่ที่ช่องใดก็ได้ (P6)	แปลงสถานการณ์จริงเป็นปัญหาคณิตศาสตร์ โดยสามารถจัดการกับวัตถุจริงในโลกกายภาพ ให้เข้าสู่เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ภายในระบบคณิตศาสตร์

หมายเหตุ C หมายถึง ความรู้แจ้ง P หมายถึง ความรู้เชิงวิธีการ

จากตารางที่ 1 แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างการจัดลำดับงาน (Task Sequence) กับการเติบโตของความรู้ (Knowledge) และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนตลอด 4 คาบเรียน โดยแสดงเส้นทางการเรียนรู้แบบเกลียว (Spiral progression) โดยเริ่มจากวัตถุจริง (Horizontal Math) ไปสู่การสร้างกฎเกณฑ์หรือวิธีการ (Vertical Math) แล้วนำกลับไปใช้กับสถานการณ์ใหม่ และความรู้แจ้งมักเกิดขึ้นควบคู่ไปกับความรู้เชิงวิธีการเสมอ ไม่แยกส่วนจากกัน ลำดับงานมีส่วนสำคัญในการทำให้นักเรียนได้ค้นพบความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการด้วยตนเอง โดยลำดับงานเริ่มจากกรณีเฉพาะ งานที่เป็นการทำให้เป็นกรณีทั่วไป งานแบบการขยาย และงานแบบบูรณาการ

อภิปรายผล

ประเด็นที่ 1 ความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการเติบโตควบคู่กันแบบวนซ้ำ ดังที่นักเรียนสร้างความรู้แจ้งเรื่องเงื่อนไขการเปรียบเทียบแล้วนำไปสู่ความรู้เชิงวิธีการในการจัดการวัตถุ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เชิงสาเหตุแบบสองทิศทางของ Rittle-Johnson และ Alibali (1999) การพัฒนาแบบวนซ้ำของ Rittle-Johnson, Siegler และ Alibali (2001) ปฏิสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์และวิธีการของ Canobi (2009) และความเชี่ยวชาญเชิงปรับตัวของ Baroody และ Dowker (2003) ขณะที่ Pesek

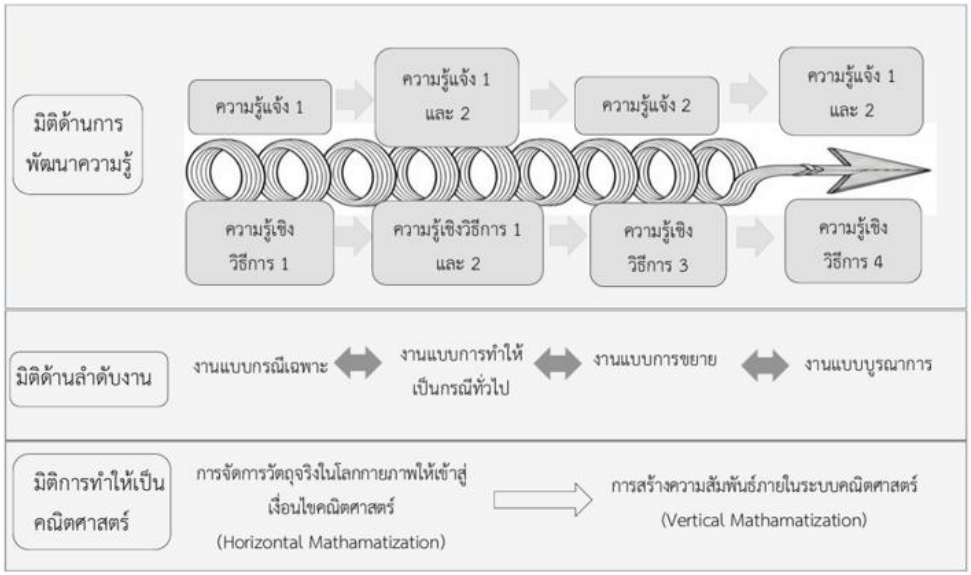
และ Kirshner (2000) ชี้ว่าการเรียนวิธีการโดยขาดมโนทัศน์เป็นอุปสรรคในระยะยาว ซึ่งยิ่งย้ำความสำคัญของการพัฒนาความรู้ทั้งสองส่วนไปพร้อมกัน

ประเด็นที่ 2 การจัดลำดับงานจากกรณีเฉพาะสู่กรณีทั่วไป การขยาย และการบูรณาการช่วยให้นักเรียนค้นพบความรู้ด้วยตนเองตามเส้นทางการเรียนรู้แบบเกลียว และมองเห็นโครงสร้างร่วมของปัญหา สอดคล้องกับ Isoda และ Katagiri (2012) Simon (1995) และ Watson และ Mason (2006) ส่วน Barrett และคณะ (2017) ยืนยันว่าการจัดลำดับกิจกรรมตามพัฒนาการช่วยให้เด็กก้าวผ่านระดับความเข้าใจเรื่องการวัดความยาวได้อย่างมีประสิทธิภาพ ผลการวิจัยนี้จึงเป็นตัวอย่างรูปธรรมของการประยุกต์แนวคิดลำดับงานในบริบทไทย ซึ่ง Inprasitha (2019) ระบุว่ายังขาดแคลน

ประเด็นที่ 3 การกำหนดหน่วย (unitization) เป็นจุดเปลี่ยนที่ทำให้นักเรียนข้าม จากการจัดการวัตถุจริง (horizontal mathematization) ไปสู่การสร้างความสัมพันธ์ภายในระบบคณิตศาสตร์ (vertical mathematization) สอดคล้องกับ Freudenthal (2002) และ Gravemeijer (1994) ที่เน้นการสร้างความรู้จากบริบทที่มีความหมาย ทั้งนี้ Sisman และ Aksu (2016) พบว่า นักเรียนที่ขาดความเข้าใจเรื่องหน่วยมักนับขีดบนไม้บรรทัดแทนช่วงหน่วยและเริ่มวัดจากเลข 1 แทนเลข 0 ขณะที่ Barrett, Clements และ Sarama (2017) ชี้ว่าการวนซ้ำหน่วยเป็นระดับพัฒนาการสำคัญ และ Kamii และ Clark (1997) อธิบายว่าไม้บรรทัดเป็นเรื่องยากเพราะหน่วยถูกกำหนดไว้ล่วงหน้า เด็กจึงใช้เครื่องมือได้โดยไม่เข้าใจว่าหน่วยคืออะไร ผลการวิจัยจึงสนับสนุนว่าการสอนการวัดในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ไม่ควรเริ่มที่ไม้บรรทัด แต่ควรให้นักเรียนสร้างความเข้าใจเรื่องหน่วยจากวัตถุจริงและสื่อกลางที่ไม่เป็นทางการก่อน

องค์ความรู้ใหม่จากการวิจัย

จากการวิเคราะห์การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความยาวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 พบองค์ความรู้ใหม่ที่สามารถสรุปได้เป็นแผนภาพได้ดังนี้



แผนภาพที่ 5 แสดงกลไกการพัฒนาความรู้

จากแผนภาพที่ 5 แสดงให้เห็นว่ากลไกการพัฒนาความรู้ไม่ได้พัฒนาแยกส่วน แต่ความรู้แจ้ง (C) และความรู้เชิงวิธีการ (P) จะต้องพัฒนาไปพร้อมกันในทุกระดับงาน พัฒนาการของการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ ควรเริ่มจากขั้นต้น (Horizontal) ซึ่งเป็นการจัดการเชิงกายภาพ (เปรียบเทียบทางตรง) เพื่อสร้างเงื่อนไขคณิตศาสตร์ในโลกจริง ขั้นกลาง (Transition) การนำสื่อกลางมาใช้เปลี่ยนจากความยาวเชิงรูปธรรม ให้กลายเป็นจำนวนของสื่อกลาง (เปรียบเทียบทางอ้อม) ขั้นสูง (Vertical) ซึ่งหมายถึง การเข้าสู่ระบบหน่วยมาตรฐานซึ่งเป็นนามธรรมมากขึ้น นักเรียนจะมีความยืดหยุ่นสูงขึ้น ความสัมพันธ์เชิงโครงสร้างของงาน งานแบบบูรณาการเป็นขั้นสูงสุดที่รวบรวมความรู้แจ้ง (C1-C5) และความรู้เชิงวิธีการ (P1-P6) ที่มีจำนวนมากเข้าด้วยกัน ซึ่งจะเกิดขึ้นได้เมื่อนักเรียนผ่านประสบการณ์จากงานแบบกรณีเฉพาะ การทำให้เป็นกรณีทั่วไป การขยาย และงานแบบบูรณาการมาตามลำดับ อย่างไรก็ตามการเรียนรู้ความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการใหม่ งานอาจวนกลับไปที่งานแบบกรณีเฉพาะของความรู้นั้น ๆ ได้ ความรู้เรื่องหน่วย (Unitization) คือจุดเปลี่ยนสำคัญที่ทำให้นักเรียนข้ามจากการจัดการวัตถุจริงในโลกกายภาพให้เข้าสู่เงื่อนไขคณิตศาสตร์ ไปสู่การสร้างความสัมพันธ์ภายในระบบคณิตศาสตร์ ได้อย่างแท้จริง องค์ความรู้นี้ชี้ให้เห็นว่า การสอนเรื่องการวัดในระดับชั้น ประถมศึกษาปีที่ 1 ไม่ควรเริ่มต้นที่การใช้ไม้บรรทัดทันที แต่ควรเริ่มจากการสร้างเงื่อนไขทางกายภาพ ให้แม่นยำก่อน

สรุป

การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องความยาวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 พบว่า การจัดลำดับงานมีผลโดยตรงต่อการกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดพัฒนาการทางความรู้และการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ โดยกระบวนการเรียนรู้ดำเนินไปในลักษณะเส้นทางการเรียนรู้แบบเกลียวที่เริ่มจากการจัดการวัตถุจริงไปสู่การสร้างกฎเกณฑ์และนำกลับไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ องค์ความรู้ที่สำคัญคือความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการไม่ได้พัฒนาแยกจากกัน แต่จะเติบโตควบคู่กันไปแบบวนซ้ำตามแนวคิดของกระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ เริ่มจากการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ในแนวราบที่ผู้เรียน จัดการวัตถุทางกายภาพให้เข้าสู่เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ เช่น การเรียนรู้ว่าการเปรียบเทียบความยาวทางตรงต้องมีจุดเริ่มต้นที่เสมอกันและวัตถุต้องอยู่ในแนวตรง จนกระทั่งนักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นผ่านการใช้สื่อกลางในกรณีที่ไม่สามารถนำวัตถุมาทาบกันได้โดยตรง ซึ่งเป็นจุดเปลี่ยนผ่านสำคัญไปสู่การทำให้เป็นคณิตศาสตร์ในแนวตั้งที่เน้นการสร้างความสัมพันธ์ภายในระบบคณิตศาสตร์เอง นักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดจากการใช้สื่อกลางที่ไม่เป็นทางการไปสู่เครื่องมือมาตรฐานอย่างไม้บรรทัด พัฒนาการเหล่านี้แสดงให้เห็นว่างานแบบบูรณาการเป็นขั้นสูงสุดที่รวบรวมทั้งความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการเข้าด้วยกัน โดยมีเรื่องการกำหนดหน่วยเป็นจุดเปลี่ยนสำคัญที่ทำให้นักเรียนข้ามจากการจัดการโลกกายภาพเข้าสู่ระบบคณิตศาสตร์ได้อย่างแท้จริง

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัย ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะ ดังนี้

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

จากผลการวิจัย พบว่า การเริ่มต้นสอนเรื่องการวัดความยาวในระดับประถมศึกษาปีที่ 1 ไม่ควรเร่งรัดให้นักเรียนใช้เครื่องมือมาตรฐานอย่างไม้บรรทัดในทันที แต่ควรจัดกิจกรรมที่ส่งเสริม

ให้นักเรียนได้สร้างเงื่อนไขทางกายภาพด้วยตนเองก่อน จากนั้นจึงขยายไปสู่การใช้สื่อกลางที่ไม่เป็นทางการเพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ข้อจำกัดทางกายภาพทำให้ไม่สามารถทาบวัตถุได้โดยตรง การปล่อยให้ผู้เรียนได้เผชิญปัญหาและค้นพบวิธีการแก้ปัญหาด้วยตนเองผ่านงานแบบกรณีเฉพาะ งานขยาย และงานบูรณาการ จะช่วยให้ความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการพัฒนาไปพร้อมกันอย่างมั่นคง

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ขยายผลการศึกษาไปยังเรื่องการวัดในมิติอื่น ๆ เช่น ชั่ง การตวง หรือการวัดมุม เพื่อทดสอบว่ากลไกการพัฒนาความรู้แจ้งและความรู้เชิงวิธีการแบบวนซ้ำ (Iterative Model) และเส้นทางการเรียนรู้แบบเกลียว (Spiral Progression) ให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกันหรือไม่ ในทุกหัวข้อคณิตศาสตร์พื้นฐาน

2.2 ควรมีการศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับบทบาทของภาษาและการสื่อสารในชั้นเรียนที่มีผลต่อการเปลี่ยนผ่านจากกระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ในแนวราบ (Horizontal Mathematization) ไปสู่แนวตั้ง (Vertical Mathematization)

เอกสารอ้างอิง

สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (องค์การมหาชน). (2567). *รายงานผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ปีการศึกษา 2566*. https://www.niets.or.th/th/content/ view/26776

Anderson, J. R. (1993). *Rules of the mind*. Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., & Dowker, A. (Eds.). (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., & Lai, M. L. (2007). Preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(2), 131–171. https://doi.org/10.1080/10986060709336813

Barrett, J. E., Clements, D. H., & Sarama, J. (2017). Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series, 16*, 1–195. https://www.nctm.org/Store/Products/JRME-Monograph-16--Children-s-Measurement--A-Longitudinal-Study-of-Children-s-Knowledge-and-Learning-of-Length,-Area,-and-Volume

Braithwaite, D. W., & Sprague, L. (2021). Conceptual knowledge, procedural knowledge, and metacognition in routine and nonroutine problem solving. *Cognitive Science, 45*(10), Article e13048. https://doi.org/10.1111/cogs.13048

Canobi, K. H. (2009). Conceptual and procedural interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*(2), 131–149. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.07.008

Clements, D. H., & Sarama, J. (2020). *Learning and teaching early math: The learning*

trajectories approach (3rd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003083528

Crooks, N. M., & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344–377. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37*(1), 4–15. https://doi.org/10.1177/00222194040370010201

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443–471. https://doi.org/10.2307/749485

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203063538

Hussein, Y. F. (2022). Conceptual knowledge and its importance in teaching mathematics. *Middle Eastern Journal of Research in Education and Social Sciences, 3*(1), 50–65. https://doi.org/10.47631/mejress.v3i1.445

Inprasitha, M. (2019). A new model of mathematics curriculum and instruction system in Thailand. In C. Vistro-Yu & T. Toh (Eds.), *School mathematics curricula* (pp. 51–77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-6312-2_4

Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom*. World Scientific. https://doi.org/10.1142/8163

Isoda, M., & Olfos, R. (2021). *Teaching multiplication with lesson study: Japanese and Ibero-American theories for mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6

Kamii, C., & Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics, 97*(3), 116–121. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1997.tb17354.x

Kemmis, S., & McTaggart, R. (2005). Participatory action research: Communicative action and the public sphere. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (3rd ed., pp. 559–603). SAGE Publications.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/t11_ir_mathematics_fullbook.pdf

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*

(J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Eds.). National Academies Press. https://www.nationalacademies.org/publications/9822

Pesek, D., & Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 524–540. https://doi.org/10.2307/749885

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175–189. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1118–1134). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346–362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Sarama, J., & Clements, D. H. (2016). Physical and virtual manipulatives: What is "concrete"? In P. Moyer-Packenham (Ed.), *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives* (pp. 71–93). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_4

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114–145. https://doi.org/10.2307/749205

Sisman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1293–1319. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5

Smith, J. P., Males, L. M., & Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(4), 239–270. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219930

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404–411. https://doi.org/10.2307/30034943

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521–525). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(2), 91-111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1