

การพัฒนาแบบแผนการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์*

THE DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL MODEL TO ENHANCE COMPETENCY IN MATHEMATICAL PROOF AMONG PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS

สมพล พวงสั้น*, ขวัญ เพียชัย, สุกัญญา หะยีสและ, เอนก จันทจรูญ

Sompon Puangsun*, Khawn Piasai, Sukanya Hajisalah, Anek Janjaroon

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร ประเทศไทย

Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok, Thailand

*Corresponding author E-mail: sompon.ps@gmail.com

*Tel: 063-161-5599

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 60/60 และ 2) เปรียบเทียบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น การวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงปริมาณ กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยนี้เป็นนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์ชั้นปีที่ 1 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 12 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบชั้นภูมิ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยนี้ ประกอบด้วย รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น แผนการจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบการเรียนการสอน และแบบทดสอบวัดสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สถิติที่ใช้ในการวิจัยนี้ได้แก่ ร้อยละ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียวแบบวัดซ้ำ ผลการวิจัยพบว่า 1) รูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์มีกระบวนการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 ทบทวนประสบการณ์เดิมของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นที่ 2 ส่งเสริมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แบ่งเป็น 4 ขั้นตอนย่อย (วงจร PARR) ประกอบด้วยขั้นเตรียมการเพื่อการพิสูจน์ ขั้นปฏิบัติการพิสูจน์ ขั้นทำซ้ำการพิสูจน์ร่วมกัน และขั้นสะท้อนคิดและอภิปรายผลจากบทพิสูจน์ ขั้นที่ 3 ตรวจสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และขั้นที่ 4 วิพากษ์เพื่อการปรับปรุงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีค่าประสิทธิภาพเท่ากับ 61.24/61.40 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ 60/60 และ 2) นักศึกษาครุคณิตศาสตร์มีสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ: รูปแบบการเรียนการสอน, สมรรถนะ, การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์, นักศึกษาครุคณิตศาสตร์

Abstract

This research article aimed to 1) Develop an instructional model that enhances pre-service mathematics teachers' competency in mathematical proof to be effective according to the 60/60



criterion and 2) Compare pre-service mathematics teachers' competency in mathematical proof before and after learning through the developed instructional model. This research employed a quantitative approach. The sample for this research consisted of 12 first-year pre-service mathematics teachers at Rajabhat Rajanagarindra University during the second semester of the academic year 2024, selected by stratified random sampling. The research instruments included the developed instructional model, lesson plans based on the instructional model, and tests of competency in mathematical proof. The statistics used in this research comprised percentage, mean, standard deviation, and one-way repeated measures ANOVA. The research results revealed that 1) The instructional model designed to enhance pre-service mathematics teachers' competency in mathematical proof consisted of four steps: Step 1: Reviewing previous experiences in mathematical proof. Step 2: Promoting competency in mathematical proof, which had four sub-steps (PARR cycle): preparation for proving, action on proving, repetition on proving with peers, and reflection and discussion from the proof. Step 3: Verifying competency in mathematical proof. Step 4: Critiquing mathematical proof for improvement. The efficiency of the instructional model was 61.24/61.40, which met the 60/60 criterion. Additionally, and 2) Pre-service mathematics teachers' competency in mathematical proof after learning through the developed instructional model was higher than before learning, with statistical significance at the .05 level.

Keywords: Instructional Model, Competency, Mathematical Proof, Pre-Service Mathematics Teacher

บทนำ

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นการอ้างเหตุผลอย่างสมเหตุสมผลเพื่อแสดงข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริง โดยอาศัยข้อสมมติ สัจพจน์ และทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้รับการพิสูจน์แล้วก่อนหน้านี้ด้วยกฎการอนุมาน (Rosen, K. H., 2019) ซึ่งการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ถือเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์และมักถูกเปรียบเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ (Ozturk, T. & Guven, B., 2025) โดยเฉพาะนักศึกษาครูคณิตศาสตร์จะต้องมีความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี เพื่อนำไปใช้ทั้งการเรียนรู้ในชั้นเรียนรายวิชาทางการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และการปฏิบัติการสอนในสถานศึกษา อีกทั้งการจัดการศึกษาระดับปริญญาตรีของคณะครุศาสตร์ในกลุ่มสาขาวิชาคณิตศาสตร์ยังกำหนดผลลัพธ์การเรียนรู้ตามมาตรฐานคุณวุฒิระดับปริญญาตรีไว้ว่า ผู้เรียนต้องมีความรู้เกี่ยวกับหลักการ แนวคิด ทฤษฎี เนื้อหาสาระคณิตศาสตร์และโครงสร้างนามธรรมที่ถูกกำหนดขึ้นผ่านทางกลุ่มของสัจพจน์ ซึ่งมีการให้เหตุผลที่แน่นอนโดยใช้ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (มาตรฐานคุณวุฒิระดับปริญญาตรี สาขาครุศาสตร์และสาขาศึกษาศาสตร์ พ.ศ. 2562, 2562) ซึ่งได้แสดงให้เห็นถึงความสำคัญของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ยังคงเป็นอุปสรรคสำคัญประการหนึ่งในกระบวนการเรียนรู้ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ (ธนพรพร พุกกะวัน, 2560)

รูปแบบการเรียนการสอนเป็นลักษณะของการจัดการเรียนการสอนที่จัดขึ้นอย่างเป็นระบบระเบียบตามหลักปรัชญา ทฤษฎี หลักการ แนวคิด หรือความเชื่อต่าง ๆ (ทิสนา แคมมณี, 2563) ซึ่งสามารถช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ตามจุดมุ่งหมายเฉพาะของรูปแบบการเรียนการสอนนั้น (ประสาธ เนืองเฉลิม, 2567) รูปแบบการเรียนการสอนจะมีขั้นตอนการดำเนินการและองค์ประกอบต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน และทำให้การดำเนินการสอนบรรลุผลได้อย่างมีประสิทธิภาพและมีประสิทธิผล ทั้งนี้ ผู้สอนควรออกแบบรูปแบบการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาผู้เรียนตามเป้าหมายและบริบทที่เกี่ยวข้อง เนื่องจากไม่มีรูปแบบการเรียนการสอนที่ดีที่สุดที่สามารถ

นำไปสู่การบรรลุจุดมุ่งหมายได้ในทุกเรื่อง โดยทุกรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไม่สามารถใช้พัฒนาผู้เรียนได้ในทุกด้าน ทุกสถานการณ์ และทุกเวลา ผู้สอนจึงต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมและจะต้องศึกษา ทำความเข้าใจ ปฏิบัติตามเงื่อนไขของการนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ (ขมนาด เชื้อสุวรรณเทวี, 2561) ทำให้การพัฒนาแบบการเรียนการสอนเป็นหนึ่งในแนวทางของการแก้ปัญหาการเรียนรู้หรือการเสริมสร้างการเรียนรู้ของผู้เรียนตามเป้าหมายและบริบทที่เกี่ยวข้อง อนึ่ง ขั้นตอนการสอนการพิสูจน์โดยอาศัยกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 4 ขั้นตอน ตามแนวคิดของโพลยา (ยุพิน พิพิธกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล, 2562) เป็นแนวทางการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หนึ่งที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง

สมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้จนประสบความสำเร็จเมื่อพบกับเนื้อหาใหม่หรือเนื้อหาที่ซับซ้อนขึ้นในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และคุณลักษณะที่มีอยู่ในตนเอง (สมพล พวงสั้น และคณะ, 2568) ซึ่งสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จะเป็นสมรรถนะเฉพาะของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ แต่จากการจัดการเรียนการสอนที่ผ่านมา ข้อเท็จจริงส่วนหนึ่ง พบว่า หลังจากที่นักศึกษาครูคณิตศาสตร์ผ่านการเรียนรายวิชาหลักการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นรายวิชาแรกที่นักศึกษาครูได้เรียนเนื้อหาของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และเป็นรายวิชาที่วางรากฐานของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทำให้นักศึกษาครูแต่ละคนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ระดับหนึ่ง แต่เมื่อต้องเรียนรายวิชาอื่นที่มีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาครูยังคงมีปัญหาและอุปสรรคในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสิ่งเหล่านี้สะท้อนให้เห็นว่า นักศึกษาครูคณิตศาสตร์เหล่านี้ยังขาดสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตาม ในปัจจุบันการเรียนการสอนฐานสมรรถนะได้ถูกนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาจนถึงระดับอุดมศึกษา รวมถึงการผลิตบัณฑิตครูของกลุ่มมหาวิทยาลัยราชภัฏ ซึ่งเป็นความร่วมมือของกลุ่มมหาวิทยาลัยราชภัฏในการผลิตบัณฑิตและพัฒนาครูฐานสมรรถนะเพื่อพัฒนากำลังคนสำหรับศตวรรษที่ 21 (เดลินิวส์, 2566) อีกทั้ง การพัฒนาแบบการเรียนการสอนยังสอดคล้องกับแนวทางในการเรียนการสอนฐานสมรรถนะ ซึ่งคือ การใช้รูปแบบการเรียนการสอนสู่การพัฒนาสมรรถนะ (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2563) เช่น การพัฒนาแบบการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างสมรรถนะทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (กษมา เกิดประสงค์, 2560) การพัฒนาแบบการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างสมรรถนะการวิจัยเชิงนวัตกรรมของนักศึกษาครู (อัจฉราพรรณ ก้นสุยะ และสุพินดา เพชร, 2567)

ด้วยความสำคัญและเหตุผลดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจพัฒนาแบบการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นจะช่วยส่งเสริมให้นักศึกษาครูคณิตศาสตร์ได้เรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบผ่านการลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง และแบ่งปันการเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในชั้นเรียนและกับผู้สอนจนเกิดเป็นสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อันส่งผลให้นักศึกษาครูคณิตศาสตร์มีความพร้อมในการเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ตามมาตรฐานคุณวุฒิระดับปริญญาตรีและเป็นครูคณิตศาสตร์มืออาชีพที่มีสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับการจัดการเรียนการสอนได้อย่างมีประสิทธิภาพต่อไป อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนให้กับรายวิชาคณิตศาสตร์อื่นที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนาแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 60/60
2. เพื่อเปรียบเทียบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น



วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงปริมาณ โดยแบ่งการดำเนินการวิจัยเป็น 2 ระยะ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. ระยะการออกแบบและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์

การวิจัยในระยะนี้เป็นการออกแบบและพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 60/60 โดยดำเนินการทดลองนำร่องเพื่อประเมินประสิทธิภาพของรูปแบบการเรียนการสอน จำนวน 2 รอบ ได้แก่ รอบที่ 1 การประเมินแบบหนึ่งต่อหนึ่งเพื่อตรวจสอบความเป็นปรนัยและความเหมาะสมในเบื้องต้นของรูปแบบการเรียนการสอนจากการนำไปใช้ และรอบที่ 2 การประเมินแบบหนึ่งต่อสาม เพื่อหาประสิทธิภาพของรูปแบบการเรียนการสอน (รัตนะ บัวสนธ์, 2568)

1.1 กลุ่มทดลองนำร่องที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของรูปแบบการเรียนการสอน

กลุ่มทดลองนำร่องที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของรูปแบบการเรียนการสอนเป็นนักศึกษาหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ของมหาวิทยาลัยราชภัฏราชชนครินทร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 12 คน ซึ่งเป็นนักศึกษาครุคณิตศาสตร์กลุ่มที่มีผลการเรียนในรายวิชาทางการพิสูจน์คณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง ระดับปานกลาง และระดับต่ำ กลุ่มละ 4 คน ได้มาจากการเลือกตัวอย่างแบบเจาะจงโดยใช้เป็นกลุ่มทดลองนำร่องในการประเมินแบบหนึ่งต่อหนึ่ง จำนวน 3 คน (จากนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ทั้ง 3 กลุ่ม กลุ่มละ 1 คน) และใช้เป็นกลุ่มทดลองนำร่องในการประเมินแบบหนึ่งต่อสาม จำนวน 9 คน (จากนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ทั้ง 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน) ซึ่งไม่ใช่นักศึกษาครุคณิตศาสตร์ในการประเมินแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

1.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1.2.1 รูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ถูกออกแบบและพัฒนาขึ้นบนฐานของทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ ทฤษฎีการเรียนรู้ของกาเย่ เข็มทิศการเรียนรู้ 2030 แนวทางการสอนการพิสูจน์ แนวคิดการโค้ชเพื่อเสริมสร้างสมรรถนะ แนวคิดการสะท้อนคิด แนวคิดการให้ข้อมูลย้อนกลับ การประเมินตามสภาพจริงอิงสมรรถนะ โดยรูปแบบการเรียนการสอนนี้ ประกอบด้วย 4 องค์ประกอบ ที่มีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

1.2.1.1 หลักการของรูปแบบการเรียนการสอน ประกอบด้วย 1) เป็นการจัดการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนสร้างความรู้ด้วยตนเองผ่านการลงมือปฏิบัติการเขียนพิสูจน์โดยใช้ความรู้และประสบการณ์เดิมในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นฐาน 2) เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้แบ่งปันและสะท้อนคิดการเรียนรู้ร่วมกัน 3) เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนเข้าใจถึงการเรียนรู้ของตนเองทั้งจุดเด่นและจุดที่ควรปรับปรุงของตนเองซึ่งนำมาพัฒนาการเรียนรู้ของตนเองได้ และ 4) เป็นการจัดการเรียนการสอนที่คำนึงถึงเจตคติของผู้เรียนโดยใช้แรงจูงใจทางบวกกับผู้เรียน

1.2.1.2 วัตถุประสงค์ของรูปแบบการเรียนการสอน คือ เพื่อเสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์

1.2.1.3 กระบวนการจัดการเรียนการสอนของรูปแบบการเรียนการสอน มี 4 ขั้นตอน ประกอบด้วย 1) ขั้นที่ 1 ทบทวนประสบการณ์เดิมของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นขั้นเตรียมนักศึกษาครูให้มีความพร้อมกับการเรียนรู้และฝึกปฏิบัติการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยทบทวนความรู้และประสบการณ์เดิมของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้วยการตั้งคำถามกระตุ้นความคิดเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง (บทนิยามและทฤษฎีบท) และระเบียบวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงปัญหาและข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการเขียนพิสูจน์ที่ผ่านมาพร้อมอภิปรายแนวทางการแก้ไขร่วมกัน 2) ขั้นที่ 2 ส่งเสริมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นกระบวนการเรียนรู้แบบวนซ้ำ 4 ขั้นตอนย่อย (วงจร PARR) ได้แก่ ขั้นเตรียมการ

เพื่อการพิสูจน์ เป็นขั้นที่ให้นักศึกษาแต่ละคนได้เรียนรู้กับเนื้อหาใหม่ โดยเริ่มต้นด้วยการแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้หรือเนื้อหาที่จะได้เรียนรู้โดยผู้สอนเพื่อให้นักศึกษาแต่ละคนได้กำหนดความมุ่งหวังในการเรียนรู้ของตนเอง เมื่อต้องพบกับเนื้อหาใหม่ ผู้สอนเป็นผู้ชี้แนะและตั้งคำถามกระตุ้นความคิดกับนักศึกษา ในกรณีที่เป็นการเป็นบทนิยาม นักศึกษาต้องทำความเข้าใจกับคำศัพท์ หรือสัญลักษณ์ที่ปรากฏในบทนิยาม แล้วจึงพิจารณาข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ต้องพิสูจน์ต่อไป ส่วนในกรณีที่เป็นการข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ต้องพิสูจน์ นักศึกษาดำเนินการเช่นเดียวกับกรณีที่เป็นการเป็นบทนิยามแล้วจึงวิเคราะห์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ต้องพิสูจน์นั้นทั้งรูปแบบของข้อความทางคณิตศาสตร์และวิธีการพิสูจน์ พร้อมวางกลยุทธ์ตามระเบียบการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยวางโครงสร้างส่วนต้นและส่วนท้ายของบทพิสูจน์ ขั้นปฏิบัติการพิสูจน์ (Action) เป็นขั้นที่ให้นักศึกษาแต่ละคนลงมือปฏิบัติการพิสูจน์ด้วยตนเอง โดยเขียนแสดงการพิสูจน์เชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต้นและส่วนท้ายของบทพิสูจน์เข้าหากันด้วยเทคนิคกระบวนการคิดไปข้างหน้า หรือกระบวนการคิดไปข้างหลัง รวมทั้งอ้างอิงเหตุผลประกอบการพิสูจน์ด้วยโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ขั้นทำซ้ำการพิสูจน์ร่วมกัน เป็นขั้นที่ให้นักศึกษาแต่ละคนทวนการเขียนพิสูจน์ของตนเอง แล้วให้นักศึกษาแลกเปลี่ยนการเรียนรู้กับเพื่อนในกลุ่มของตนเองโดยผลัดกันนำเสนอแนวคิดของตนเองให้กับเพื่อนภายในกลุ่มฟัง จากนั้นลงมือเขียนเรียบเรียงบทพิสูจน์ใหม่ร่วมกัน ขั้นสะท้อนคิดและอภิปรายผลจากบทพิสูจน์ เป็นขั้นที่ให้นักศึกษาแต่ละกลุ่มสะท้อนคิดและอภิปรายผลจากบทพิสูจน์ระหว่างกลุ่มและกับผู้สอน ซึ่งแลกเปลี่ยนประสบการณ์การเรียนรู้จากการปฏิบัติการเขียนพิสูจน์ร่วมกันและประเมินผลการพิสูจน์ของแต่ละกลุ่มว่าบรรลุผลหรือไม่ พบปัญหาหรือไม่ อย่างไร รวมถึงสามารถปรับปรุงแก้ไขปัญหานั้นได้หรือไม่ อย่างไร เพื่อนำไปสู่การปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาการพิสูจน์ของตนเองให้สมบูรณ์ต่อไป 3) ขั้นที่ 3 ตรวจสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นขั้นที่ให้นักศึกษาร่วมกันสรุปโน้ตที่ได้จากการเรียนด้วยการตั้งคำถามกระตุ้นความคิดกับนักศึกษา จากนั้นผู้สอนดำเนินการทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ของแผนการจัดการเรียนรู้กับนักศึกษาด้วยแบบทดสอบย่อย เมื่อดำเนินการแล้วเสร็จ นักศึกษาต้องประเมินประสบการณ์การเรียนรู้โดยการสะท้อนคิดกับตนเองด้วยการเขียนอนุทินการเรียนรู้ ซึ่งพิจารณาจากกิจกรรมการเรียนรู้มาไตร่ตรองอย่างรอบคอบว่า สิ่งที่ได้ปฏิบัติประสบผลสำเร็จหรือไม่ หรือพบอุปสรรคหรือไม่ อย่างไร และ 4) ขั้นที่ 4 วิพากษ์เพื่อการปรับปรุงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นขั้นที่ดำเนินการหลังจากเสร็จสิ้นกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน ซึ่งเป็นการประเมินแบบทดสอบย่อยจากขั้นที่ 3 โดยวิพากษ์งานเขียนพิสูจน์ของนักศึกษาแต่ละคน แล้วให้ข้อมูลย้อนกลับเป็นรายบุคคลเพื่อให้นักศึกษานำข้อมูลย้อนกลับที่ได้ไปพัฒนางานเขียนพิสูจน์ของตนเองให้สมบูรณ์ต่อไป โดยผู้สอนต้องระบุทั้งจุดเด่น จุดที่ควรปรับปรุง และให้คำแนะนำงานเขียนพิสูจน์ให้กับนักศึกษาแต่ละคน

1.2.1.4 การวัดและประเมินผลของรูปแบบการเรียนการสอน ประกอบด้วย

1) เป็นการวัดและประเมินผลเพื่อส่งเสริมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาซึ่งมีลักษณะเป็นการประเมินเพื่อพัฒนา โดยเป็นการตรวจสอบพัฒนาการของนักศึกษาตามจุดประสงค์การเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยแบบทดสอบย่อยและอนุทินการเรียนรู้ และ 2) เป็นการวัดและประเมินผลสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาซึ่งมีลักษณะการประเมินเพื่อวินิจฉัยและการประเมินเพื่อตัดสินสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาด้วยแบบทดสอบวัดสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ทั้งนี้ จากการประเมินคุณภาพโดยผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน พบว่า ความสอดคล้องระหว่างองค์ประกอบของรูปแบบการเรียนการสอนนี้โดยรวมมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.72 ซึ่งถือว่า รูปแบบการเรียนการสอนนี้มีองค์ประกอบสอดคล้องกันอยู่ในระดับมากที่สุด และยังพบว่า ความเหมาะสมของรูปแบบการเรียนการสอนนี้โดยรวมมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.69 ซึ่งถือว่า รูปแบบการเรียนการสอนนี้มีความเหมาะสมอยู่ในระดับมากที่สุด



1.2.2 แผนการจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบการเรียนการสอน จำนวน 9 แผน แผนละ 2 คาบ (120 นาที) โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ ประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหาสาระ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ และการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ ซึ่งดำเนินการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ใน 3 ช่วง (ช่วงละ 3 แผน) ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้ ช่วงที่ 1 เป็นเนื้อหาพื้นฐานหรือเนื้อหาใหม่ที่สัมพันธ์กับเนื้อหาเดิมที่ผู้เรียนเคยศึกษามาแล้วโดยมีความมุ่งหมายเพื่อปรับกระบวนการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย แผนที่ 1 เรื่อง ภาวะคู่หรือคี่ของจำนวนเต็ม แผนที่ 2 เรื่อง สมภาค และแผนที่ 3 เรื่อง จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ช่วงที่ 2 เป็นเนื้อหาใหม่หรือเนื้อหาที่ซับซ้อนขึ้น ประกอบด้วย แผนที่ 4 เรื่อง กรุป แผนที่ 5 เรื่อง กรุปอาบีเลียน และแผนที่ 6 เรื่อง กรุปย่อย และช่วงที่ 3 เป็นเนื้อหาใหม่หรือเนื้อหาที่ซับซ้อนขึ้น ประกอบด้วย แผนที่ 7 เรื่อง โคเซต แผนที่ 8 เรื่อง สมบัติของโคเซต และแผนที่ 9 เรื่อง กรุปย่อยปรกติ ทั้งนี้ จากการประเมินคุณภาพโดยผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน พบว่า ความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบการเรียนการสอนโดยรวมมีค่าเฉลี่ยตั้งแต่ 4.72 ถึง 4.78 ซึ่งถือว่า แผนการจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบการเรียนการสอนในทุกแผนมีความเหมาะสมอยู่ในระดับมากที่สุด

1.2.3 แบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ฉบับ โดยแต่ละฉบับเป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ (เลือกใช้ 3 ข้อ) ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้ แบบทดสอบฉบับที่ 1 เป็นแบบทดสอบที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับกรุป ซึ่งเป็นเนื้อหาในรายวิชา พีชคณิตนามธรรม ใช้ทดสอบหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอน ช่วงที่ 1 แบบทดสอบฉบับที่ 2 เป็นแบบทดสอบที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับโคเซตและกรุปย่อยปรกติ ซึ่งเป็นเนื้อหาในรายวิชา พีชคณิตนามธรรม ใช้ทดสอบหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอน ช่วงที่ 2 และแบบทดสอบฉบับที่ 3 เป็นแบบทดสอบที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับกรุปผลหาร ซึ่งเป็นเนื้อหาในรายวิชา พีชคณิตนามธรรม และเนื้อหาเกี่ยวกับเซตจำกัดและจำนวนเชิงการนับ ซึ่งเป็นเนื้อหาในรายวิชา ทฤษฎีเซต ใช้ทดสอบหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอน ช่วงที่ 3 โดยข้อสอบแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 18 - 20 คะแนน ตามเกณฑ์การประเมินของสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (สมพล พวงสั้น และคณะ, 2568) ทั้งนี้ จากการประเมินคุณภาพโดยผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน พบว่า ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบแต่ละข้อกับจุดประสงค์ (IOC) ของแบบทดสอบวัดสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทุกฉบับ มีค่าเท่ากับ 1.00 ซึ่งมีความมากกว่า 0.50 จึงถือว่า ข้อสอบทุกข้อสามารถนำไปใช้เก็บรวบรวมข้อมูลต่อไปได้

1.3 การเก็บรวบรวมข้อมูล

1.3.1 ดำเนินการจัดการเรียนการสอนช่วงที่ 1 ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 - 3 กับนักศึกษาครูกลุ่มทดลองนำร่อง จำนวน 6 คาบ โดยในการจัดการเรียนการสอนแต่ละครั้ง ผู้วิจัยจะดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นคะแนนระหว่างเรียน

1.3.2 ดำเนินการทดสอบหลังเรียนช่วงที่ 1 ด้วยแบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 1 จำนวน 2 คาบ กับนักศึกษาครูกลุ่มทดลองนำร่อง โดยผู้วิจัยจะดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นคะแนนหลังเรียน

1.3.3 ดำเนินการจัดการเรียนการสอนช่วงที่ 2 ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 - 6 พร้อมทดสอบหลังเรียนช่วงที่ 2 ด้วยแบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 2 และดำเนินการจัดการเรียนการสอนช่วงที่ 3 ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 - 9 พร้อมทดสอบหลังเรียนช่วงที่ 3 ด้วยแบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 3 ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1) และข้อ 2)

1.4 การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยหาประสิทธิภาพของรูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์โดยใช้สูตร E_1/E_2 โดยหาประสิทธิภาพ จำนวน 3 ครั้ง ดังนี้

1.4.1 การหาประสิทธิภาพครั้งที่ 1 หาค่า E_1 จากคะแนนแบบทดสอบย่อยในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 - 3 และหาค่า E_2 จากคะแนนแบบทดสอบวัดสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 1

1.4.2 การหาประสิทธิภาพครั้งที่ 2 หาค่า E_1 จากคะแนนแบบทดสอบย่อยในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 - 6 และหาค่า E_2 จากคะแนนแบบทดสอบวัดสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 2

1.4.3 การหาประสิทธิภาพครั้งที่ 3 หาค่า E_1 จากคะแนนแบบทดสอบย่อยในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 - 9 และหาค่า E_2 จากคะแนนแบบทดสอบวัดสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 3 ซึ่งใช้ค่าประสิทธิภาพครั้งนี้เป็นค่าประสิทธิภาพของรูปแบบการเรียนการสอน

2. ระยะเวลาศึกษาประสิทธิผลของรูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์

การวิจัยในระบายนีเป็นการทดลองใช้สำหรับศึกษาประสิทธิผลของรูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์โดยเปรียบเทียบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยดำเนินการวิจัยตามแบบแผนการทดลองกลุ่มเดียววัดหลายครั้งแบบอนุกรมเวลา (ศิริกาญจน์ บวรวิศยศ และคณะ, 2561)

2.1 ประชากรและกลุ่มตัวอย่างในการศึกษาประสิทธิผลของรูปแบบการเรียนการสอน

ประชากรในการศึกษาระบายนี้นักศึกษาหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 25 คน จำแนกเป็นนักศึกษาครุคณิตศาสตร์กลุ่มที่มีระดับผลการเรียนในรายวิชาทางการพิสูจน์คณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง จำนวน 7 คน ระดับปานกลาง จำนวน 8 คน และระดับต่ำ จำนวน 10 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาระบายนี้นักศึกษาหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 12 คน จากนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ทั้ง 3 กลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบชั้นภูมิ

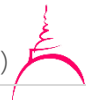
2.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยในระบายนี้นักศึกษาหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1 ได้แก่ 1) รูปแบบการเรียนการสอน 2) แผนการจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบการเรียนการสอน จำนวน 9 แผน และ 3) แบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ฉบับ โดยแต่ละฉบับเป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ ซึ่งผลจากการศึกษาของระบายนี พบว่า แบบทดสอบฉบับที่ 1 มีค่าความยากตั้งแต่ 0.48 ถึง 0.63 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.50 ถึง 0.75 แบบทดสอบฉบับที่ 2 มีค่าความยากตั้งแต่ 0.23 ถึง 0.57 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.46 ถึง 0.81 และแบบทดสอบฉบับที่ 3 ค่าความยากตั้งแต่ 0.47 ถึง 0.52 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.43 ถึง 0.76 ซึ่งจะเห็นว่า ค่าความยากมีค่าระหว่าง 0.20 ถึง 0.80 ทุกข้อในทุกฉบับ และค่าอำนาจจำแนกมีค่ามากกว่า 0.20 ทุกข้อในทุกฉบับ รวมทั้งแบบทดสอบฉบับที่ 1 ฉบับที่ 2 และฉบับที่ 3 มีค่าสัมประสิทธิ์โอเมก้าของแมคโดนัลด์ (McDonald's Omega) เท่ากับ 0.88 0.86 และ 0.73 ตามลำดับ จึงถือว่า แบบทดสอบทั้งสามฉบับนี้มีความเหมาะสมต่อการนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไปได้

2.3 การเก็บรวบรวมข้อมูล

2.3.1 ดำเนินการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 1 จำนวน 2 คาบ กับนักศึกษาครุกลุ่มตัวอย่าง โดยผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอน

2.3.2 ดำเนินการจัดการเรียนการสอนช่วงที่ 1 ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 - 3 กับนักศึกษาครุกลุ่มทดลองนำร่อง จำนวน 6 คาบ กับนักศึกษาครุกลุ่มตัวอย่าง แล้วดำเนินการทดสอบหลังเรียนช่วงที่ 1



ด้วยแบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 1 จำนวน 2 คาบ โดยผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอน ช่วงที่ 1

2.3.3 ดำเนินการจัดการเรียนการสอนช่วงที่ 2 ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 - 6 พร้อมทดสอบหลังเรียนช่วงที่ 2 ด้วยแบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 2 และดำเนินการจัดการเรียนการสอนช่วงที่ 3 ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 - 9 พร้อมทดสอบหลังเรียนช่วงที่ 3 ด้วยแบบทดสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 3 ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2) โดยผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอน ช่วงที่ 2 และช่วงที่ 3

2.4 การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยเปรียบเทียบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยใช้สถิติพื้นฐานด้วยร้อยละ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสถิติทดสอบด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียวแบบวัดซ้ำผ่านการทดสอบค่าเอฟ (F-test)

ผลการวิจัย

1. ผลการศึกษาประสิทธิภาพรูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ในการประเมินแบบหนึ่งต่อหนึ่งมีผลปรับปรุงในรายละเอียดขึ้นทบทวนประสบการณ์เดิมของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของแต่ละแผนให้สอดคล้องกับเนื้อหาสาระของแผนการจัดการเรียนรู้ที่ขึ้นยั้งขึ้นและในบางคำชี้แจงเกี่ยวกับการเขียนอ้างอิงเหตุผลประกอบการพิสูจน์ของใบงานและใบกิจกรรมเพื่อสร้างความเข้าใจที่ตรงกันและสอดคล้องกับตัวชี้วัดของสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ส่วนการประเมินแบบหนึ่งต่อสามมีผลการหาประสิทธิภาพรูปแบบการเรียนการสอน ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ประสิทธิภาพรูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ (การประเมินแบบหนึ่งต่อสาม)

การหาประสิทธิภาพ	คะแนนระหว่างเรียน			คะแนนหลังเรียน			ค่าประสิทธิภาพ (E_1/E_2)
	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ย	ร้อยละ	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ย	ร้อยละ	
ครั้งที่ 1	58	33.89	58.43	58	12.67	21.84	58.43/21.84
ครั้งที่ 2	115	69.89	60.77	57	25.67	45.04	60.77/45.04
ครั้งที่ 3	172	105.33	61.24	57	35.00	61.40	61.24/61.40

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์มีค่าประสิทธิภาพ (E_1/E_2) เท่ากับ 61.24/61.40 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ 60/60

2. ผลการเปรียบเทียบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นแสดงข้อมูลดังตารางที่ 2 ถึงตารางที่ 4 ต่อไปนี้

ตารางที่ 2 ร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 1 ถึงช่วงที่ 3

สมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	ร้อยละ
ก่อนเรียน	58	5.75	2.14	9.91
หลังเรียนช่วงที่ 1	58	20.17	5.57	34.78
หลังเรียนช่วงที่ 2	57	33.00	10.02	57.89
หลังเรียนช่วงที่ 3	57	38.17	10.70	66.96

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่า ร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ก่อนเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมีค่าเท่ากับ 9.91 ส่วนร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 1 ช่วงที่ 2 และช่วงที่ 3 มีค่าเท่ากับ 34.78 57.89 และ 66.96 ตามลำดับ

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบความแตกต่างร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 1 ถึงช่วงที่ 3

แหล่งความแปรปรวน	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
การทดสอบสมรรถนะ	23483.125	2.182	10763.675	64.533	.000*
ความคลาดเคลื่อน	4002.856	23.999	166.795		

*ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 และใช้วิธี Greenhouse-Geisser

จากตารางที่ 3 จะเห็นว่า ร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 1 ถึงช่วงที่ 3 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 อย่างน้อย 1 คู่

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 1 ถึงช่วงที่ 3 เป็นรายคู่

ร้อยละของคะแนนสมรรถนะ		Mean Difference	Std. Error	Sig.
ก่อนเรียน	หลังเรียนช่วงที่ 1	- 24.857	2.406	.000*
	หลังเรียนช่วงที่ 2	- 47.983	4.798	.000*
	หลังเรียนช่วงที่ 3	- 57.047	5.205	.000*
หลังเรียนช่วงที่ 1	หลังเรียนช่วงที่ 2	- 23.126	4.856	.004*
	หลังเรียนช่วงที่ 3	- 32.189	3.703	.000*
หลังเรียนช่วงที่ 2	หลังเรียนช่วงที่ 3	- 9.063	5.302	.692

*ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 และใช้การเปรียบเทียบรายคู่ด้วยวิธี Bonferroni

จากตารางที่ 4 จะเห็นว่า ร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 1 ช่วงที่ 2 และช่วงที่ 3 มีค่าสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสะท้อนให้เห็นว่า นักศึกษาครูคณิตศาสตร์มีสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้ ร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 2 และช่วงที่ 3 มีค่าสูงกว่าหลังเรียนช่วงที่ 1 แต่ร้อยละของคะแนนสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 2 กับช่วงที่ 3 มีค่าไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผล

จากการวิจัย เรื่อง การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์ สามารถอภิปรายผลการวิจัยในประเด็นสำคัญ ได้ดังนี้

1. รูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูคณิตศาสตร์มีกระบวนการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 ทบทวนประสบการณ์เดิมของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นที่ 2 ส่งเสริมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นที่ 3 ตรวจสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และ



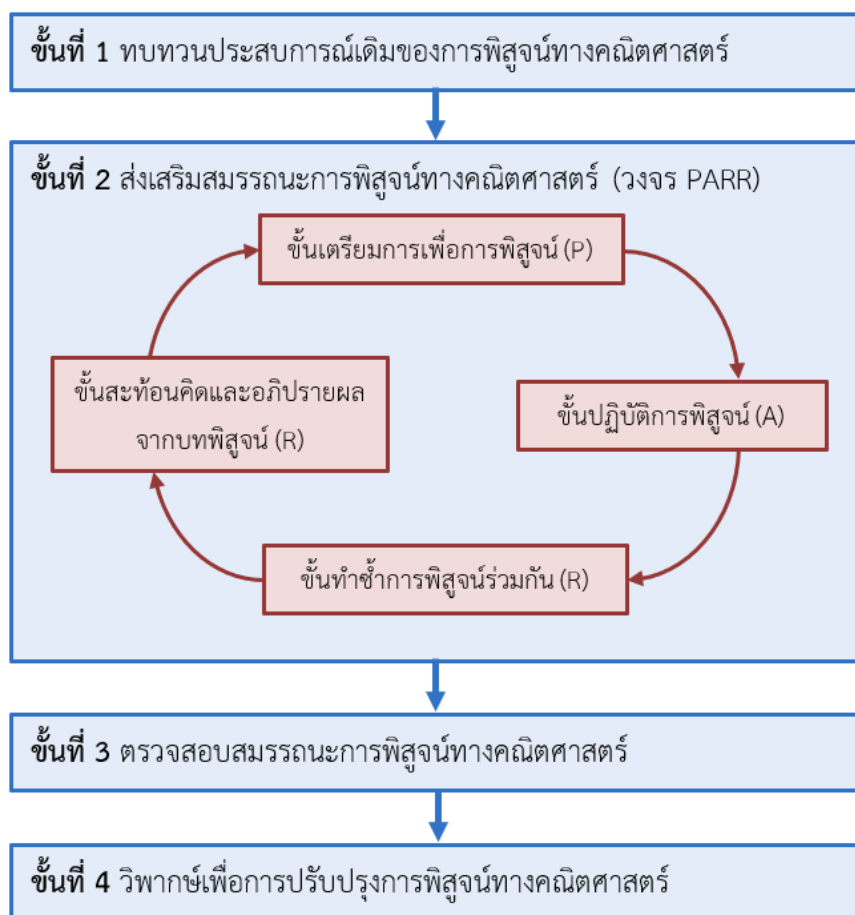
ขั้นที่ 4 วิพากษ์เพื่อการปรับปรุงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีค่าประสิทธิภาพเท่ากับ 61.24/61.40 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ 60/60 ทั้งนี้ อาจเนื่องด้วยรูปแบบการเรียนการสอนนี้ได้รับการออกแบบอย่างเป็นระบบบนฐานคิดของทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ที่เน้นให้นักศึกษาคูคณิตศาสตร์สร้างความรู้ด้วยตนเองผ่านการทบทวนความรู้และประสบการณ์เดิมร่วมกับการลงมือปฏิบัติการพิสูจน์ในวงจร PARR ผสมกับแนวทางการสอนการพิสูจน์และทฤษฎีการเรียนรู้ของกาเย่ที่ช่วยจัดลำดับการเรียนรู้อย่างเป็นขั้นเป็นตอน และบูรณาการร่วมกับเชมิตการเรียนรู้ 2030 ซึ่งช่วยขับเคลื่อนให้นักศึกษาคูเกิดความตระหนักรู้และรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของตนเอง โดยมีแนวคิดของการโค้ชและการให้ข้อมูลย้อนกลับเป็นเครื่องมือสำคัญของผู้สอนในการส่งเสริมการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ให้กับนักศึกษาคู รวมทั้งประยุกต์ใช้แนวคิดการสะท้อนคิดทั้งการสะท้อนระดับกลุ่มผ่านการอภิปรายกลุ่มและการสะท้อนตนเองผ่านการเขียนอนุทินการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างมีทิศทาง โดยเฉพาะการนำแนวการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (นฤเบศ ลาภยิยัง, 2561) มาประยุกต์ใช้ในการออกแบบรูปแบบการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับตัวชี้วัดของสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จนส่งผลให้นักศึกษาคูสามารถพัฒนาสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพซึ่งอาจต้องใช้เวลาในการซึมซับและสะสมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งองค์ประกอบของรูปแบบการเรียนการสอนนี้มีความสัมพันธ์กันโดยมีความสอดคล้องกันและความเหมาะสมอยู่ในระดับมากที่สุด จึงส่งผลให้รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ รูปแบบการเรียนการสอนนี้จึงเป็นแบบแผนการดำเนินการสอนที่ได้รับการจัดเป็นระบบที่สอดคล้องกับทฤษฎีการเรียนรู้และได้ผ่านการทดสอบประสิทธิภาพ ซึ่งจะสามารถช่วยให้นักศึกษาคูเกิดการเรียนรู้ได้ตามจุดมุ่งหมายของรูปแบบการเรียนการสอนได้ (ประสาธ เนืองเฉลิม, 2567) ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ เนตรนารี ไพโรจน์พิริยะกุล ที่พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีประสิทธิภาพเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ (เนตรนารี ไพโรจน์พิริยะกุล, 2565) รวมทั้งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ยุทธนา พันธุ์มี และเฉลิม ทองจอน ที่พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนด้วยการเรียนรู้ นำตนเองร่วมกับการเรียนรู้แบบเชิงรุกเพื่อส่งเสริมสมรรถนะด้านวิถีวิทยาการจัดการเรียนรู้ของนักศึกษาคูมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ (ยุทธนา พันธุ์มี และเฉลิม ทองจอน, 2568) อนึ่ง ค่า E_2 จากการหาประสิทธิภาพครั้งที่ 1 มีค่าต่ำกว่าเกณฑ์อย่างมาก ทั้งนี้ เนื่องด้วยในช่วงแรกของการจัดการเรียนการสอนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนนี้ ซึ่งมีการจัดการเรียนการสอน จำนวน 3 แผน นักศึกษาคูคณิตศาสตร์ยังอยู่ในช่วงปรับกระบวนการเรียนรู้และอาจต้องอาศัยระยะเวลาและการฝึกฝนเพิ่มอย่างต่อเนื่องด้วยรูปแบบการเรียนการสอนนี้ จึงเกิดเป็นสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ต่อไปได้

2. นักศึกษาคูคณิตศาสตร์มีสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งนี้ อาจเป็นเพราะรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมุ่งเน้นให้นักศึกษาคูได้สร้างความรู้ด้วยตนเองผ่านการลงมือปฏิบัติการเขียนพิสูจน์โดยใช้ความรู้และประสบการณ์เดิมเป็นฐาน และยังส่งเสริมให้นักศึกษาคูได้แบ่งปันการเรียนรู้และสะท้อนคิดในการเรียนรู้ร่วมกัน โดยเฉพาะขั้นส่งเสริมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นกระบวนการเรียนรู้แบบวนซ้ำ 4 ขั้นตอนย่อย (วงจร PARR) ได้แก่ เตรียมการเพื่อการพิสูจน์ (P) ปฏิบัติการพิสูจน์ (A) ทำซ้ำการพิสูจน์ร่วมกัน (R) และสะท้อนคิดและอภิปรายผลจากบทพิสูจน์ (R) ทำให้นักศึกษาคูได้ฝึกวิเคราะห์ วางกลยุทธ์ และเขียนเรียบเรียงบทพิสูจน์อย่างเป็นระบบ อีกทั้งผู้สอนยังได้วิพากษ์งานเขียนและให้ข้อมูลย้อนกลับเป็นรายบุคคลโดยระบุทั้งจุดเด่นและจุดที่ควรปรับปรุงพร้อมให้คำแนะนำ จึงทำให้นักศึกษาคูนำข้อมูลไปพัฒนางานเขียนพิสูจน์ของตนเองให้สมบูรณ์ต่อไป จึงส่งผลให้สมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาคูหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นในแต่ละช่วงสูงกว่าก่อนเรียน สะท้อนให้เห็นว่า รูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสามารถเสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาคูคณิตศาสตร์ได้ ผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับงานวิจัยของ อนุชาติ ชาดิรัมย์ ที่

พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีสมรรถนะทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลและด้านการสื่อสารหลังเรียนด้วยหลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (อนุชาติ ขาติรัมย์, 2564) และเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับผลการวิจัยของ ปรีชา จันทกล้า และคณะ ที่พบว่า นักศึกษาคณิตศาสตร์มีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้เชิงรุกสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (ปรีชา จันทกล้า และคณะ, 2567) นอกจากนี้ สมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นช่วงที่ 2 กับช่วงที่ 3 ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 สะท้อนให้เห็นว่า นักศึกษาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ได้รับการเสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จนเริ่มเข้าสู่ระดับมีเสถียรภาพแม้ว่าเนื้อหาในช่วงที่ 3 จะมีความซับซ้อนและเป็นนามธรรมมากขึ้น

องค์ความรู้ใหม่

รูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาคณิตศาสตร์ มีกระบวนการจัดการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน ประกอบด้วย ขั้นที่ 1 ทบทวนประสบการณ์เดิมของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นที่ 2 ส่งเสริมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (วงจร PARR) แบ่งเป็น 4 ขั้นตอนย่อย ประกอบด้วย ขั้นเตรียมการเพื่อการพิสูจน์ ขั้นปฏิบัติการพิสูจน์ ขั้นทำซ้ำการพิสูจน์ร่วมกัน และขั้นสะท้อนคิดและอภิปรายผลจากบทพิสูจน์ ขั้นที่ 3 ตรวจสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และขั้นที่ 4 วิพากษ์เพื่อการปรับปรุงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 กระบวนการจัดการเรียนการสอนของรูปแบบการเรียนการสอน



สรุปและข้อเสนอแนะ

จากการวิจัยครั้งนี้ สรุปได้ว่า 1) รูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์มีกระบวนการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 ทบทวนประสบการณ์เดิมของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นที่ 2 ส่งเสริมสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แบ่งเป็น 4 ขั้นตอนย่อย (วงจร PARR) ประกอบด้วย ขั้นเตรียมการเพื่อการพิสูจน์ ขั้นปฏิบัติการพิสูจน์ ขั้นทำซ้ำการพิสูจน์ร่วมกัน และขั้นสะท้อนคิดและอภิปรายผลจากบทพิสูจน์ ขั้นที่ 3 ตรวจสอบสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และขั้นที่ 4 วิพากษ์เพื่อการปรับปรุงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีค่าประสิทธิภาพเท่ากับ 61.24/61.40 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ 60/60 และ 2) นักศึกษาครุคณิตศาสตร์มีสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนด้วยรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และจากผลการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะที่ได้จากการวิจัยและการนำผลการวิจัยไปใช้ ประกอบด้วย 1) ควรวางแผนจัดการเวลาในการจัดการเรียนการสอนแต่ละครั้งให้เหมาะสมและรัดกุม โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การให้ความสำคัญกับระยะเวลาในการชี้แนะจากอาจารย์ผู้สอน เนื่องด้วยการพัฒนาสมรรถนะเฉพาะจำเป็นต้องใช้เวลาในการโค้ชซึ่งจะทำให้ นักศึกษาครุคณิตศาสตร์สามารถพัฒนาการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเป็นขั้นตอนและประสบความสำเร็จเมื่อพบเนื้อหาใหม่หรือเนื้อหาที่ซับซ้อนขึ้น 2) ด้วยกระบวนการเรียนการสอนของรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นมีขั้นตอนการวิพากษ์เพื่อการปรับปรุงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อาจารย์ผู้สอนจึงควรสร้างบรรยากาศที่ส่งเสริมให้นักศึกษาครุคณิตศาสตร์กล้าแสดงความคิดเห็นและยอมรับข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ โดยให้มองว่า ความผิดพลาดเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนรู้ และ 3) ควรปรับหรือออกแบบรายละเอียดเพิ่มเติมในกระบวนการเรียนการสอนของรูปแบบการเรียนการสอนนี้สำหรับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาเรขาคณิต เนื่องด้วยธรรมชาติของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาเรขาคณิตจะต้องอาศัยการวิเคราะห์จากรูปประกอบและอาจต้องพิจารณาจากการสร้างเพื่อพิสูจน์ร่วมด้วย รวมถึงผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะแนวทางในการวิจัยครั้งต่อไป ประกอบด้วย 1) ควรมีการติดตามผลของสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์หลังจากผ่านไป 1 - 2 ภาคเรียน เพื่อศึกษาประสิทธิผลของรูปแบบการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นต่อความคงทนของการเรียนรู้ และ 2) ควรมีการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่เสริมสร้างสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ร่วมแอปพลิเคชันหรือเทคโนโลยีดิจิทัลต่าง ๆ

เอกสารอ้างอิง

- กษมา เกิดประสงศ์. (2560). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่เสริมสร้างสมรรถนะทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. *Veridian E-Journal Silpakorn University*, 10(3), 2121-2137.
- ชมนาด เชื้อสุวรรณเทวี. (2561). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เดลินิวส์. (2566). กลุ่ม มรภ. 38 แห่ง เปิดโมเดลพัฒนาครูฐานสมรรถนะ. เรียกใช้เมื่อ 13 เมษายน 2569 จาก <https://www.dailynews.co.th/news/1996231/>
- ทิตนา แหมมณี. (2563). ศาสตร์การสอน: องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ. (พิมพ์ครั้งที่ 24). กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธนพร พงกษะวัน. (2560). การศึกษาความสามารถและปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสวนดุสิต. *วารสารวิจัย มสศ*, 13(2), 167-184.

- นฤเบศ ลาภยิ่งยง. (2561). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์. วารสารราชพฤกษ์, 16(1), 37-45.
- เนตรนารี ไพโรจน์พิริยะกุล. (2565). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. วารสารวิชาการและวิจัยสังคมศาสตร์, 17(1), 17-31.
- ประสาธ เนืองเฉลิม. (2567). วิจัยการเรียนการสอน. (พิมพ์ครั้งที่ 7). กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ปรีชา จันทกล้า และคณะ. (2567). การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักศึกษาครู โดยการจัดการเรียนรู้เชิงรุก. Journal of Roi Kaensarn Academi, 9(4), 743-756.
- มาตรฐานคุณวุฒิระดับปริญญาตรี สาขาครุศาสตร์และสาขาศึกษาศาสตร์ พ.ศ. 2562. (2562). ราชกิจจานุเบกษา เล่ม 136 ตอนพิเศษ 56 ง หน้า 12 (6 มีนาคม 2562).
- ยุทธนา พันธมี และเฉลิม ทองจอน. (2568). รูปแบบการเรียนการสอนด้วยการเรียนรู้ส่วนตัวตนเองร่วมกับการเรียนรู้แบบเชิงรุกเพื่อส่งเสริมสมรรถนะด้านวิถีวิทยาการจัดการเรียนรู้สำหรับนักศึกษาหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต มหาวิทยาลัยราชภัฏ. Lawarath Social E-Journal, 7(1), 85-102.
- ยุพิน พิพิธกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล. (2562). รูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. ใน ศาคร บุญดาว (บรรณาธิการ), สารตถะวิทยวิธีทางคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 6 - 10 (หน้า 1-65). นนทบุรี: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมนิราช.
- รัตน์ บัสนันท์. (2568). การวิจัยและพัฒนานวัตกรรมการศึกษา. (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ศิริกาญจน์ บวรวิศวยศ และคณะ. (2561). การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างวินัยในตนเอง ในวิชาชีพครูสำหรับนักศึกษาครู. วารสารวิจัยและพัฒนาหลักสูตร, 8(1), 242-259.
- สมพล พวงสั้น และคณะ. (2568). การพัฒนาตัวชี้วัดและเกณฑ์การประเมินของสมรรถนะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ โดยใช้เทคนิคเดลฟายแบบปรับปรุง. วารสารสังคมศาสตร์และวัฒนธรรม, 9(11), 113-128.
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. (2563). การจัดการเรียนรู้ฐานสมรรถนะเชิงรุก. กรุงเทพมหานคร: 21 เซ็นจูรี.
- อนุชาติ ชาตธีรมย์. (2564). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมสมรรถนะทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วารสารการบริหารนิติบุคคลและนวัตกรรมการศึกษา, 7(9), 65-78.
- อัญญาพรรณ กันสุขะ และสุพินดา เพชรา. (2567). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้ฐานสมรรถนะเพื่อเสริมสร้างสมรรถนะการวิจัยเชิงนวัตกรรมของนักศึกษาครู. ใน วารสารบัณฑิตศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์. 18(3), 291-308.
- Ozturk, T. & Guven, B. (2025). Enhancing Pre-Service Mathematics Teachers' Proof-Writing Skills: The Effect of a Social Learning Environment Enriched with Dynamic Geometry Software. Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 18(3), 197-218.
- Rosen, K. H. (2019). Discrete Mathematics and Its Applications. (8th ed.). New York: McGraw-Hill.