



บทความวิจัย

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทาง
คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร
โดยการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการนิกภาพ (Visualization)
กับการสอนแบบปกติ*

A STUDY OF MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ABILITY
AND MATHEMATICAL REASONING ABILITY OF NINTH GRADE
STUDENTS IN SURFACE AREAS AND VOLUMES USING COGNITIVE
GUIDED INSTRUCTION WITH VISUALIZATION AND
THE CONVENTIONAL METHOD

กมลทิพย์ เกตุศรี

Kamolthip Kadsri

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี

Chommanad Cheausuwantavee

รุ่งทิwa แยมรุ่ง

Rungtiwa Yamrung

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

Srinakharinwirot University, Thailand

E-mail: kamolthip.084@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ 2) เปรียบเทียบความสามารถใน การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ 3) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ 4) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนพิบูลอุปถัมภ์ จำนวน 2 ห้องเรียน เป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน จำนวน 39 คน และกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน จำนวน 38 คน ซึ่ง

* Received June 5, 2022; Revised June 20, 2022; Accepted July 11, 2022

ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ 1) แผนการสอนโดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศภาพ 2) แผนการสอนโดยการสอนแบบปกติ 3) แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 4) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ สถิติ t-test ผลการวิจัยพบว่า 1) ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศภาพ สูงกว่าก่อนได้รับการสอน และสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศภาพ สูงกว่าก่อนได้รับการสอน และสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ: การสอนแนะให้รู้คิด, การนิเทศภาพ, ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์, ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

Abstract

The Objectives of this research article were to 1) to compare the mathematical problem solving abilities of ninth grade students before and after receiving Cognitive Guided Instruction (CGI) together with visualization, 2) to compare the mathematical problem solving abilities of ninth grade students who received CGI together with visualization with those of students who have been taught normally, 3) to compare the mathematical reasoning abilities of ninth grade students before and after receiving CGI together with visualization, and 4) to compare the mathematical reasoning abilities of ninth grade students who received CGI together with visualization with those of students who had been taught normally. The sample were in this study consisted of two classroom of ninth grade student at Pibool Uppatham School, the participants chosen by Cluster Random Sampling and the experimental group and one control group were chosen by Simple Random Sampling. The tools used in the research were 1) teaching and learning management plans by CGI together with visualization, 2) normal teaching and learning management plans, 3) The test to measure mathematical problem solving abilities, and 4) The test to measure mathematical problem solving abilities. The data were statistically analyzed by using t-test. The results revealed that 1) after receiving CGI together with visualization, the mathematical problem solving abilities of ninth grade students were better than



before and better than those of students who had been taught normally with a statistical significance of 0.05. 2) After receiving CGI together with visualization, the mathematical reasoning abilities of ninth grade students were better than before and better than those of students who had been taught normally with a statistical significance of 0.05.

Keywords: Cognitively Guided Instruction, Visualization, Mathematical Problem-Solving ability, Mathematical Reasoning ability

บทนำ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์การเรียนรู้พื้นฐานที่สำคัญวิชาหนึ่งที่ช่วยก่อให้เกิดความเจริญก้าวหน้าทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี โลกปัจจุบันเจริญขึ้นเพราะการคิดค้นทางด้านวิทยาศาสตร์ ซึ่งต้องอาศัยความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ อีกทั้งคณิตศาสตร์ยังมีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) แต่ในปัจจุบันพบว่านักเรียนยังไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์เท่าที่ควร จากโครงการประเมินผลนักเรียนร่วมกับนานาชาติ (Program for International Student Assessment หรือ PISA) พบว่า ผลการประเมินการเรียนรู้เรื่องคณิตศาสตร์ตั้งแต่ปี 2000 จนถึง 2015 มีแนวโน้มลดลงอย่างต่อเนื่อง สะท้อนถึงความสามารถของนักเรียนในการใช้ความรู้และทักษะเพื่อแก้ปัญหาในชีวิตจริงที่ยังไม่ดีเท่าที่ควร อีกทั้งจากโครงการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ระดับนานาชาติ (TIMSS) ซึ่งเป็นการประเมินผลระดับนานาชาติพบว่า ในปี 2011 ประเทศไทยมีคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 427 คะแนน เมื่อจำแนกตามเนื้อหาพบว่า เรื่องเรขาคณิตได้คะแนนเฉลี่ยน้อยที่สุด 415 คะแนน เมื่อจำแนกตามพฤติกรรมการเรียนรู้พบว่าคะแนนเฉลี่ยด้านการใช้เหตุผลเท่ากับ 429 คะแนน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560) ซึ่งจะเห็นได้ว่าคะแนนการให้เหตุผล ทางคณิตศาสตร์และเนื้อหาคณิตศาสตร์ของประเทศไทยลดต่ำลงอย่างต่อเนื่อง และยังพบว่า คะแนนเรขาคณิตเป็นเนื้อหาที่มีคะแนนที่ต่ำที่สุดและลดลงอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสาระการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตนั้นมีส่วนเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันอย่างยิ่ง ทั้งในธรรมชาติและสิ่งที่มีมนุษย์สร้างขึ้นจะเห็นได้ว่าสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวล้วนประกอบด้วยรูปเรขาคณิตทั้งสิ้น แต่นักเรียนกลับละเลยไม่เห็นความสำคัญในการนำความรู้เรขาคณิตไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน ส่งผลให้ความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนยังไม่เป็นที่น่าพอใจเท่าที่ควร



นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาได้ดีเฉพาะโจทย์ที่ง่ายและค่อนข้างง่ายเท่านั้น แต่เมื่อนักเรียนไปพบกับโจทย์ที่ซับซ้อน ต้องใช้ความคิด ความรู้ ความเข้าใจในพื้นฐานเรื่องต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์มากขึ้นก็จะประสบกับปัญหาทันที (วิชัย พาณิชยสวาย, 2546) ดังที่ (ชมนาต เชื้อสุวรรณทวี, 2561) กล่าวว่า การแก้ปัญหามทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการหาคำตอบของปัญหาซึ่งต้องใช้ความรู้ในเนื้อหาคณิตศาสตร์และกระบวนการคิดอย่างเป็นลำดับขั้นตอน เลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่เหมาะสมเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา โดยแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ครูอาจจะให้นักเรียนฝึกการวิเคราะห์ และนำความเข้าใจปัญหา วางแผนการทำงาน ดำเนินการตามแผนที่วางไว้และมีการตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผลในกระบวนการแก้ปัญหา อาจใช้เทคนิคต่าง ๆ ประกอบการคิด เช่น การทำผังความคิด การทำแผนภูมิ การทำตาราง การคิดย้อนกลับ วาดภาพ (ศศิธร แม้นสงวน, 2559) นอกจากความสามารถในการแก้ปัญหาแล้ว ความสามารถในการให้เหตุผลก็ถือเป็นสิ่งจำเป็นต่อการเรียนเรขาคณิต การที่นักเรียนจะเรียนเรื่องเรขาคณิตได้อย่างเข้าใจนั้น นักเรียนจะต้องมีความสามารถในการให้เหตุผลเพื่อให้นักเรียนมีวิธีการคิดอย่างเป็นระบบสามารถใช้เหตุผลประกอบในการตอบปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผลและอธิบายกระบวนการคิดอย่างเป็นขั้นเป็นตอน ดังที่ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2547) กล่าวว่า การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญและจำเป็น เพราะการให้เหตุผลจะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาสมอง นอกเหนือไปจากการจดจำข้อเท็จจริง กฎ สูตร และการดำเนินการ การเน้นทักษะกระบวนการด้านการให้เหตุผลช่วยให้นักเรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่สามารถให้เหตุผลได้อย่างเป็นระบบและมีความหมายและตระหนักว่าทักษะการให้เหตุผลในคณิตศาสตร์สามารถประยุกต์ไปใช้ในสาขาอื่น ๆ ได้ ดังนั้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้การแก้ปัญหามีสมบูรณ์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้หากปราศจากเหตุผล (Alice, et al., 1999)

จากการศึกษาวิธีการสอนต่าง ๆ พบว่า การสอนแนะให้รู้คิด (Cognitive Guided Instruction: CGI) เป็นการจัดการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเองโดยอยู่บนพื้นฐานความเข้าใจการคิดของนักเรียน ซึ่งการจัดการเรียนการสอนจะอาศัยความรู้ของนักเรียนแต่ละคนเป็นฐานในการจัดการเรียนรู้ เป็นความรู้ความเข้าใจที่ครูจะต้องวินิจฉัยการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนว่านักเรียนสามารถแก้ปัญหานั้นได้อย่างไร โดยนักเรียนจะเลือกใช้วิธีการคิดในการแก้ปัญหามทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายตามศักยภาพของนักเรียน การจัดการเรียนการสอนในห้องเรียนครูจะต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีการพูดคุยนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหามของตนเอง ร่วมกันแลกเปลี่ยนเรียนรู้อภิปรายรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น โดยครูจะไม่สอนวิธีการแก้ปัญหามให้นักเรียนแต่จะเป็นผู้คอยชี้แนะแนวทาง



เพื่อให้ นักเรียนสามารถหาแนวทางการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองและช่วยเหลือให้นักเรียนได้ค้นพบข้อผิดพลาดของตนเอง การจัดการเรียนการสอนเช่นนี้จะช่วยให้นักเรียนสามารถหาแนวทางในการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองจนนำไปสู่ การสร้างองค์ความรู้ใหม่ ทำให้นักเรียนรู้สึกว่าการเรียนรู้เป็นเรื่องสนุก ง่ายต่อการทำความเข้าใจ ช่วยสร้างแรงจูงใจในการเรียนรู้ให้กับนักเรียน (Carpenter, P. et al., 1989) ดังที่ National Council of Teacher of Mathematics อ้างถึงใน (เกษณีย์ ยอดไพอินทร์, 2556) ในการจัดการเรียนการสอน เรื่องเรขาคณิต นักเรียนจะต้องเริ่มเรียนจากการรับรู้และระลึกถึงรูปลักษณะหรือรูปทรงภายนอก จากนั้นวิเคราะห์สมบัติของรูปเรขาคณิตนั้น ๆ ต่อจากนั้นก็หาความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตลักษณะต่าง ๆ เพื่อหาข้อสรุปแล้วนำสมบัตินั้นไปใช้ในการเหตุผลแบบนิรนัยต่อไป เพื่อให้ นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิต สามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่นๆได้ นักเรียนจะต้องได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่ท้าทาย นักเรียนจะต้องทำการสืบค้น ทดลอง และสำรวจสิ่งที่อยู่รอบตัว เช่น ฝึกการมองภาพ วาดภาพ และเปรียบเทียบรูปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2545) สอดคล้องกับปีแอร์ แวนฮิลล์ และไดน่า แวนฮิลล์ อ้างถึงใน (ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2553) ที่กล่าวว่า การนิกภาพเป็นการส่งเสริมด้านการคิดซึ่งเกี่ยวข้องโดยตรงกับความคิดทางเรขาคณิต มีบทบาทที่จะช่วยพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้ เนื่องจากการนิกภาพทางคณิตศาสตร์เป็นการบรรยายการสร้างภาพภายในที่ทำให้เกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย (Presmeg, N., 2006) และควรมีการพัฒนาความสามารถในการนิกภาพทางคณิตศาสตร์ว่าควรใช้ในวิชาคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง (Guzman, M. d., 2002) ดังที่ (อัมพร ม้าคนอง, 2559) กล่าวว่าความสามารถในการมองภาพที่เกิดจากความสัมพันธ์ลักษณะต่าง ๆ จะทำให้นักเรียนเข้าใจปัญหาหรือสถานการณ์ที่เผชิญอยู่นั้นดีพอที่จะคิดต่อ เพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาให้สำเร็จลุล่วง

จากข้อมูลที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยเห็นว่า การส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนนั้นเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งในการเรียนการสอนในเนื้อหาทางเรขาคณิต ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร โดยการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการนิกภาพ (Visualization) กับการสอนแบบปกติ ซึ่งผู้วิจัยคาดว่า การวิจัยในครั้งนี้จะเป็นแนวทางสำหรับการจัดการเรียนการสอนในเรื่องเรขาคณิตเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ก่อนและหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ก่อนและหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ
4. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง ซึ่งมีรายละเอียดวิธีดำเนินการวิจัย ดังนี้ ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โรงเรียนพิบูลอุปถัมภ์ กรุงเทพมหานคร จำนวน 5 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียน 190 คน ซึ่งโรงเรียนจัดห้องเรียนโดยความสามารถ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โรงเรียนพิบูลอุปถัมภ์ กรุงเทพมหานคร จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 77 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยของการสุ่ม จากนั้นสุ่มอย่างง่าย เพื่อจัดเป็นกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ 1 ห้องเรียน มีนักเรียน 39 คน และกลุ่มควบคุมที่ได้รับการสอนแบบปกติ 1 ห้องเรียน มีนักเรียน 38 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างและใช้เครื่องมือในการวิจัย ดังนี้

1. แผนการสอนโดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพจำนวน 13 แผน ซึ่งสร้างให้สอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน จากนั้นวิเคราะห์มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้ให้ครอบคลุมและสอดคล้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร แล้วนำแผนการสอนเสนอต่ออาจารย์



ที่ปรึกษา แล้วให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาโดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.00

2. แผนการสอนโดยการสอนแบบปกติ จำนวน 13 แผน ซึ่งสร้างให้สอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน จากนั้นวิเคราะห์มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้ให้ครอบคลุมและสอดคล้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร แล้วนำแผนการสอนเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษา แล้วให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาโดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.00

3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ตั้งแต่ 0.67 – 1.00 แล้วนำแบบทดสอบไปทดลองใช้ (try out) แล้วนำผลมาวิเคราะห์เพื่อเลือกข้อที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.48 – 0.62 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.31 – 0.40 จากนั้นนำมาหาค่าความเชื่อมั่น ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.95

4. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ตั้งแต่ 0.67 – 1.00 แล้วนำแบบทดสอบไปทดลองใช้ (try out) แล้วนำผลมาวิเคราะห์เพื่อเลือกข้อที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.53 – 0.63 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.28 – 0.41 จากนั้นนำมาหาค่าความเชื่อมั่น ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.87

วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ทดสอบก่อนเรียนกับกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยแบ่งเป็นทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบ และทดสอบความสามารถในการให้เหตุผล จำนวน 1 คาบ

2. ดำเนินการสอนกับกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ และกลุ่มควบคุม ที่ได้รับการสอนแบบปกติ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร โดยใช้เวลาทั้งสิ้น 13 คาบ คาบละ 50 นาที

3. ทดสอบหลังเรียนกับกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยแบ่งเป็นทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบ และทดสอบความสามารถในการให้เหตุผล จำนวน 1 คาบ

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับ การสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples
2. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยใช้สถิติ t-test for Independent Samples
3. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับ การสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples
4. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยใช้สถิติ t-test for Independent Samples

ผลการวิจัย

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร โดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ กับการสอนแบบปกติมีผลการวิจัย ดังนี้

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	n	$\bar{X}$	S.D.	t	p-value
ก่อนได้รับการสอน	39	5.21	2.50	52.112*	<0.001
หลังได้รับการสอน	39	27.97	5.15		

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 1 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพสูงกว่าก่อนได้รับการสอน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 1



ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยใช้สถิติ t-test for Independent Sample

ความสามารถในการ แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	n	$\bar{X}$	S.D.	t	p-value
การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการนิเทศภาพ (Visualization) (กลุ่มทดลอง)	39	27.97	5.15	3.159*	.014
การสอนแบบปกติ (กลุ่มควบคุม)	38	24.82	5.80		

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 2 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศภาพสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 2

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศภาพ โดยใช้สถิติ t-test for Dependent Samples

ความสามารถในการ ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	n	$\bar{X}$	S.D.	t	p-value
ก่อนได้รับการสอน	39	2.13	1.0	45.441*	<0.001
หลังได้รับการสอน	39	14.03	2.55		

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 3 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศภาพสูงกว่าก่อนได้รับการสอน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 3

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยใช้สถิติ t-test for Independent Sample

ความสามารถในการ แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	n	$\bar{X}$	S.D.	t	p-value
การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการนิกภาพ (Visualization) (กลุ่มทดลอง)	39	14.03	2.55	1.947*	.001
การสอนแบบปกติ (กลุ่มควบคุม)	38	12.08	2.57		

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตารางที่ 4 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 4

อภิปรายผล

จากการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพกับการสอนแบบปกติ สามารถอภิปรายผลการวิจัยได้ ดังนี้

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร หลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพสูงกว่าก่อนได้รับการสอน และสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

เนื่องจากการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพเป็นกระบวนการที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยเป็นกระบวนการสอนบนพื้นฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียน มีกรอบแนวคิดที่ชัดเจนเกี่ยวกับกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อนำมาใช้ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ที่มุ่งให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเองผ่านการแก้ปัญหา (Carpenter, P. et al., 1989); (Fennema, M. L. F. et al., 1993); (เวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร, 2551) โดยขั้นตอนในการสอนแนะให้รู้คิด มี 4 ขั้นตอน ดังนี้ ขั้นที่ 1 ชื่นนำเสนอปัญหา ผู้วิจัยนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ที่ใช้ในชีวิตประจำวันซึ่งอยู่ในรูปข้อความที่เป็นนามธรรมโดยใช้สื่อสามมิติประกอบ เพื่อให้ นักเรียนได้เรียนรู้ลักษณะภายนอกของรูปทรงเรขาคณิตผ่านการมอง สังเกตและสัมผัส ขั้นที่ 2



ชั้นวิเคราะห์ข้อมูลและแก้ปัญหา เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้วิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ เน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ความเข้าใจโดยการระดมความคิดและอภิปรายร่วมกัน ภายในกลุ่มถึงวิธีการแก้ปัญหา โดยครูจะเป็นผู้ชี้แนะแนวทางกระตุ้นการคิดของนักเรียนให้นักเรียนวิเคราะห์ปัญหาและสื่อสารออกมาเป็นรูปธรรมผ่านการวาดภาพ โดยใช้วิธีการที่หลากหลายบนพื้นฐานความเข้าใจการคิดของนักเรียน เช่น ของจริง สื่อรูปธรรม รูปภาพ เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ มองภาพความสัมพันธ์ต่าง ๆ อันนำไปสู่การแก้ปัญหา ขั้นที่ 3 ขึ้นรายงานคำตอบและวิธีการแก้ปัญหา นักเรียนนำเสนอแนวคิด วิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหา นั้น ๆ ขั้นที่ 4 ขึ้นสรุปอภิปรายคำตอบ นักเรียนร่วมกันอภิปรายหาข้อสรุปเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบที่ถูกต้อง จากนั้นขยายแนวคิดเพื่อสรุปประเด็นนำไปสู่การสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง จะเห็นได้ว่าขั้นตอนในการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศคล้อยกับทฤษฎีของบรูเนอร์ที่กล่าวถึงขั้นพัฒนาการการเรียนรู้ของนักเรียนว่านักเรียนจะเริ่มเรียนรู้จากการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมโดยการสัมผัสจับต้องด้วยมือ ต่อมานักเรียนจะเริ่มใช้รูปภาพแทนของจริงโดยไม่จำเป็นต้องแตะต้องหรือสัมผัสของจริง สามารถที่จะสร้างจินตนาการหรือมโนภาพ และขั้นสุดท้ายนักเรียนสามารถที่จะเข้าใจสิ่งที่เป็นามธรรมหรือความคิดรวบยอดที่ซับซ้อนและเป็นนามธรรมได้ (สุรางค์ ไคว์ตระกูล, 2559) การนิเทศเป็น การแปลงความคิดจากรูปธรรมให้เป็นนามธรรม มองความสัมพันธ์ลักษณะต่าง ๆ ทำให้นักเรียนเข้าใจปัญหาหรือสถานการณ์ที่เผชิญอยู่นั้นดีพอที่จะคิดต่อเพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาให้สำเร็จลุล่วง ในทางตรงกันข้าม ถ้านักเรียนไม่สามารถมองภาพที่เกิดจากความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตจะทำให้ไม่เข้าใจสถานการณ์หรือปัญหาจึงไม่สามารถคิดแก้ปัญหาได้ (อัมพร ม้าคนอง, 2559) การนิเทศจะช่วยให้แก่นักเรียนนึกถึงหรือวิเคราะห์ภาพหรือรูปเรขาคณิตต่าง ๆ ในจินตนาการ เพื่อคิดหาคำตอบ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, 2551) ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ (สุธาร์ตน์ สมรรถการ, 2556) ที่ศึกษาเกี่ยวกับผลการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดเรื่องวิธีการเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดสูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01 นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบกับการสอนแบบปกติ พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิเทศสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ (วิมลพันธ์ ทราหยทอง, 2561) ที่กล่าวว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการให้ข้อมูลย้อนกลับเพื่อส่งเสริมการเรียนรู้ให้มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และ

ความยึดมั่นผูกพันในการเรียนหลังการทดลองสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร หลังได้รับการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิקภาพสูงกว่าก่อนได้รับการสอน และสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 3 และ 4 ตามลำดับ

เนื่องจากการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพเป็นแนวทางหนึ่งในการจัดการเรียนรู้ที่เน้นทักษะการคิดของนักเรียน ฝึกให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และให้เหตุผลได้ เป็นการกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและใช้ภาษาอธิบายหรือแสดงเหตุผลประกอบแนวคิดเพื่อตอบคำถามของทั้งจากครูและเพื่อนนักเรียนด้วยกัน มีการวิพากษ์วิจารณ์กันในห้องเรียน ทำให้นักเรียนเห็นมุมมองที่แตกต่างและหลากหลายจากเพื่อนนักเรียนคนอื่น ๆ ช่วยให้นักเรียนมีมุมมองที่กว้างขึ้น อันจะเป็นการปลูกฝังทักษะการให้เหตุผลของนักเรียนโดยไม่รู้ตัว (เวชฤทธิ์ อังกะนัทรขจร , 2551) การจัดให้มีการอภิปราย ถามให้นักเรียนเล่าความคิด ชี้แจงเหตุผลประกอบ ซึ่งเป็นการแสดงเหตุผลอย่างง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนได้เคยชินกับการคิดอย่างมีเหตุผล และการชี้แจงนี้เป็นโอกาสที่นักเรียนได้ย้อนกลับมาพิจารณาแนวคิดของตนเอง ทำความเข้าใจให้แจ่มชัดขึ้นและปรับแต่งแนวคิดได้อย่างมีเหตุผลเป็นแนวทางหนึ่งในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2547) สอดคล้องกับงานวิจัยของ (ภัทร อริยชนพงศ์, 2559) ที่ศึกษาเกี่ยวกับผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถความสามารถในการแก้ปัญหาและ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 พบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสอนแนะให้รู้คิดสูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 อีกทั้งสอดคล้องกับ (กุลวดี อำภางษ์, 2562) ที่ศึกษาเกี่ยวกับผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสอนแนะให้รู้คิดที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

สรุป/ข้อเสนอแนะ

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร โดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ กับการสอนแบบปกติ สรุปผลการวิจัยได้ว่าการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพเป็นวิธีการจัดการเรียนการสอนที่อยู่บน พื้นฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียน ให้นักเรียนวิเคราะห์



ปัญหาหรือสถานการณ์ผ่านกระบวนการมองภาพ ผักผ่อนให้นักเรียนได้มองหรือวิเคราะห์ภาพรูปแบบหลากหลายต่าง ๆ แปลงความสัมพันธ์ของโจทย์ที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรม เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมกันแลกเปลี่ยนอภิปรายถึงวิธีการในการแก้ปัญหาพร้อมเหตุผล เพื่อให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง ช่วยส่งเสริมพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น โดยข้อเสนอแนะที่ได้จากการวิจัยมีดังนี้ 1) การสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ ในขั้นการสร้างสถานการณ์ ครูควรสร้างสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ กระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจและกระตือรือร้นในการหาวิธีการเพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้น ๆ 2) ควรมีการใช้เทคโนโลยีหรือโปรแกรมสำเร็จรูปในการจัดการเรียนการสอน เนื่องจากนักเรียนแต่ละคนมีพื้นฐานความรู้ความเข้าใจที่แตกต่างกัน การใช้สื่อที่หลากหลายจะช่วยส่งเสริมการคิดการมองภาพและสร้างภาพในจินตนาการของนักเรียนเพื่อให้เกิดความเข้าใจมองเห็นภาพความสัมพันธ์ลักษณะต่าง ๆ อันจะนำไปสู่แนวทางการแก้ปัญหาได้ 3) ควรมีการศึกษามูลผลการจัดการเรียนรู้โดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ ในเนื้อหาอื่น ๆ เช่น รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ความคล้าย ความเท่ากันทุกประการ เป็นต้น 4) ควรมีการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

กิตติกรรมประกาศ

บทความวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัย เรื่อง การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร โดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการนิกภาพ กับการสอนแบบปกติ ของนางสาวกมลทิพย์ เกตุศรี นิสิตระดับมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาการทางการศึกษาและการจัดการเรียนรู้ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

เอกสารอ้างอิง

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- กุลวดี อำภางษ์. (2562). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสอนแนะให้รู้คิด(CGI) ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง

- ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วารสารบัณฑิตศึกษา, 16(72), 147-154.
- เกษณีย์ ยอดไพอินทร์. (2556). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมที่ อุดคอมปิเนชันและกลยุทธ์การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสามารถในการให้ เหตุผลและการนิรนัยทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ใน วิทยานิพนธ์ ครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ขมนาด เชื้อสุวรรณทวี. (2561). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์. (2553). 80 นวัตกรรมจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ. กรุงเทพมหานคร: พี บาลานซ์ดีไซน์แอนปรินต์.
- ภัทรอร อริยชนพงศ์. (2559). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อ ความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร, 18(4), 266-277.
- วิชัย พาณิชัยสว. (2546). สอนอย่างไรให้เด็กเก่งใจทย์คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.
- วิมลพันธ์ ทรายทอง. (2561). การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และ ความยึดมั่นผูกพันในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการ เรียนรู้โดยการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับการให้ข้อมูลย้อนกลับเพื่อส่งเสริมการเรียนรู้. ใน วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาการทางการศึกษาและการจัดการ เรียนรู้. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- เวชฤทธิ์ อังกะภัทรขจร. (2551). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด(CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงโดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูล กับ สิ่งแวดล้อมศึกษาสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. ใน วิทยานิพนธ์การศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา. มหาวิทยาลัยศรี นครินทรวิโรฒ.
- ศศิธร แม้นสงวน. (2559). พฤติกรรมการสอนคณิตศาสตร์ 2 = Teaching behavior in mathematics 2 CMA 4102 (TL 462) (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2545). เรขาคณิต. กรุงเทพมหานคร: สำนักพัฒนาธุรกิจ.



- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2547). การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพมหานคร: เอส. พี. เอ็น. การพิมพ์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). รายงานผลการวิจัยโครงการ TIMSS 2011 วิชาคณิตศาสตร์. เรียกใช้เมื่อ 12 มิถุนายน 2562 จาก https://drive.google.com/file/d/0BwqFSkq5_b7zSbUdGWmU2QkQwT00/view?resourcekey=0-jD8uOJrQRS58ZKLvVwkFDg
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2551). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- สุรรัตน์ สมรรถการ. (2556). ผลการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด(CGI) เรื่อง วิธีการเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. ใน วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- อัมพร ม้าคนอง. (2559). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ : การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Alice, et al. (1999). Mathematics Reasoning During Small-Group Problem Solving. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 1999 Yearbook. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Carpenter, P. et al. (1989). Using knowledge of children's thinking in classroom teaching: An experimental study. American Educational research Journal, 26(4), 499-531.
- Fennema, M. L. F. et al. (1993). Using children's Knowledge in Instruction. American Educational research Journal, 27(4), 556-583.
- Guzman, M. d. (2002). The role of visualization: In teaching and learning of mathematical analysis. Paper presented at the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Retrieved February 6, 2019, from ERIC (2002-July) Acc. No. ED472047
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics In Handbook of research on the psychology of mathematics

- education. Retrieved August 18, 2019, from https://www.researchgate.net/publication/241301299_Research_on_visualization_in_learning_and_teaching_mathematics.
- Alice, et al. (1999). Mathematics Reasoning During Small-Group Problem Solving. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 1999 Yearbook. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Carpenter, P. et al. (1989). Using knowledge of children's thinking in classroom teaching: An experimental study. American Educational research Journal, 26(4), 499-531.
- Guzman, M. d. (2002). The role of visualization: In teaching and learning of mathematical analysis. Paper presented at the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Retrieved February 6, 2019, from ERIC (2002-July) Acc. No. ED472047
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In Handbook of research on the psychology of mathematics education. Retrieved August 18, 2019, from https://www.researchgate.net/publication/241301299_Research_on_visualization_in_learning_and_teaching_mathematics