

แนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการ  
แก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

Guidelines for Developing Mathematical Understanding and Representation of  
Fractional Problem-Solving Abilities of Grade Seven Students

ชูศักดิ์ ชุบไธสง<sup>1</sup> และ รามนรี นนทภา<sup>2</sup>

Chusak Chubthaisong<sup>1</sup> and Ramnaree Nontapa<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

<sup>1,2</sup> Faculty of Education, Rajabhat Mahasarakham University, Thailand

<sup>1</sup>E-mail: chusak19982541@hotmail.com, ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-9164-8050>

<sup>2</sup>E-mail: ramnaree\_cute.pig@hotmail.com, ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-7586-0617>

Received 28/06/2023

Revised 03/07/2023

Accepted 15/07/2023

บทคัดย่อ

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการแปลความ ตีความ และสามารถสร้างการเชื่อมโยงระหว่างความคิดความจริง และกระบวนการทางคณิตศาสตร์จนสามารถในการนำความรู้เดิมที่มีอยู่มาสัมพันธ์กับสถานการณ์ใหม่จนสามารถแก้สถานการณ์ปัญหานั้น ๆ ได้ ดังนั้นการวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ (1) เพื่อศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน (2) เพื่อเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน จำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา และ (3) เพื่อศึกษาแนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน กลุ่มตัวอย่างที่เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสารคามพิทยาคม จำนวน 210 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ แบบทดสอบการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ แบบทดสอบการแก้ปัญหา และแบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง สถิติที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน การวิเคราะห์ความแปรปรวนพหุคูณ วิธีการศึกษาเฉพาะรายกรณี การวิเคราะห์งานเขียน และนำเสนอด้วยวิธีพรรณนาวิเคราะห์ ผลการวิจัยพบว่า (1) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาสูง คือ ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาสูง คือ การใช้สัญลักษณ์ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วนของนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาสูง เรียงลำดับตามคะแนนของค่าเฉลี่ยที่มากที่สุด คือ ขั้นทำความเข้าใจ ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบตามลำดับ (2) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียน จำแนกตามระดับสติปัญญา แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ (3) แนวทาง

ในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน คือ ครูจะต้องพานักเรียนแสดงวิธีทำที่หลากหลายในโจทย์ข้อเดียว การใช้สื่อหรืออุปกรณ์ ในการจัดการเรียน การสอนเรื่องเศษส่วน ครูจะต้องอธิบายวิธีการในการดำเนินการอย่างละเอียดและชัดเจน พร้อมกับการตรวจ คำตอบ และวิธีการสรุปคำตอบ

**คำสำคัญ :** ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์; การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์; การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์; เศษส่วน

## Abstract

Mathematical Understanding is the ability to translate, interpret, and create links between ideas, facts, and mathematical processes to the point of being able to relate existing knowledge to new situations so that problems can be solved. Thus, this research aims (1) to examine the understanding of math and representations for solving fractions problems, 2) to compare the understanding of math and representations for solving fractions problems classified by sex and intelligence level, and 3) to study ways to develop mathematical understanding and representation The sample was seventh students' grade at Sarakham Pittayakom School. A total of 210 students. The research instruments were: 1) understanding of mathematics test, 2) representation of mathematics test, 3) problem-solving test, and 4) interview form. The statistics used in the research were frequency, percentage, mean, and standard deviation. Multiple variance analysis using a case study method writing analysis and presented by descriptive and analytical methods. The results of the research revealed that (1) mathematical understanding. of students with a high level of intelligence, level 2 Image Making The mathematical representation of students with a high level of intelligence is the use of symbols. solve mathematical problems about fractions had a high level of intelligence. Sorted by the highest mean score, which is understanding the problem devising a plan carrying out the plan, and looking back, respectively. (2) mathematical understanding and a representation of the student's ability to solve fraction problems by level of intelligence The difference was statistically significant at the .05 level. And (3) Guidelines for developing mathematical understanding and representation of fractional problem-solving abilities is that the teacher must show students how to do a variety of things in a single problem. Use of media or equipment to manage classes Teaching

fractions Teachers must explain how to do this in detail and clearly, along with examining the answers and how to summarize them.

**Keywords:** Mathematical Understanding; Mathematical Representation; Mathematical Problem Solving; Fractions

## บทนำ

การที่จะทำให้นักเรียนได้เข้าใจและเข้าถึงความคิดทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในโลกความเป็นจริง (Real World) แล้วปรับเปลี่ยนมาเป็นการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายนั้นเป็นเรื่องที่ยากสำหรับนักเรียน ดังนั้นเพื่อที่จะทำให้นักเรียนแสดงแนวคิดที่อยู่ภายในและนำเสนอแนวคิดนั้นออกมาให้เห็น (Kaput, 1991: 53-74) จำเป็นต้องใช้สถานการณ์ปัญหาเพื่อผลักดันหรือกระตุ้นให้นักเรียนแสดงแนวคิดโดยใช้สถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริงของนักเรียน ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของญี่ปุ่นสื่อการเรียนรู้ถูกนำมาใช้เพื่อสนับสนุนให้นักเรียนแก้ปัญหาและแสดงแทนแนวคิดได้อย่างหลากหลายรวมถึงทำให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้น และทำให้เกิดความสุขในการเข้าร่วมทางคณิตศาสตร์ (Tsuji, 2007: 52-60) นอกจากนี้ National Council of Teachers of Mathematics (2002: 1) ได้กล่าวว่า เพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ และสามารถที่จะสร้างความเข้าใจได้ควรที่จะส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง (Constructivism) โดยผู้สอนจะไม่บอกแนวทางวิธีการแก้โจทย์ปัญหาให้กับเด็ก ๆ และครูจะตั้งโจทย์ขึ้นมาและชักชวนหรือกระตุ้นให้เด็ก ๆ ได้คิดค้นวิธีการแก้ปัญหาขึ้นมา และเมื่อเด็ก ๆ ได้คำตอบมา เรียบร้อยแล้วผู้สอนก็จะไม่เฉลยในทันทีที่ถูกหรือผิด แต่จะชักชวนให้นักเรียนทั้งหมดได้ร่วม แสดงความคิดเห็นแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนรับรู้ว่าเขาสามารถคิดและหาคำตอบได้จากตัวเอง

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Understanding) เป็นความสามารถในการแปลความ (Translation) ตีความ (Interpretation) และสามารถสร้างการเชื่อมโยงระหว่างความคิดความจริง และกระบวนการทางคณิตศาสตร์จนสามารถในการนำความรู้เดิมที่มีอยู่มาสัมพันธ์กับสถานการณ์ใหม่ จนสามารถแก้สถานการณ์ปัญหานั้น ๆ ได้ และสามารถสรุปความหรือขยายความคิดโดยอาศัยความสัมพันธ์เกี่ยวกับสถานการณ์ต่าง ๆ แล้วนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล ซึ่งสอดคล้องกับทัศนะของ Wilson (1971: 661) ได้กล่าวถึง ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ว่าเป็นความสามารถในการแปลความ (Translation) ตีความ (Interpretation) และขยายความ (Extrapolation) ในปัญหาใหม่ ๆ โดยการนำเอาความรู้ที่ได้เรียนมาไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ National Council of Teachers of Mathematics. (1989: 67) กล่าวว่า การแสดงแทน (Representation) เป็นการแสดงสิ่งที่เป็นรูปธรรมเกี่ยวกับความคิดรอบยอด ซึ่งเกิดขึ้นภายใต้กระบวนการคิด และการแสดงแทน

เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ทำให้นักเรียนสามารถจำลองสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดไว้ในแนวทางที่เป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา ซึ่งการจะเลือกตัวแสดงแทนต่าง ๆ ให้เหมาะสมกับปัญหานั้นต้องคำนึงถึงบริบทแวดล้อมที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา และสมาครคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ได้กล่าวไว้ในหนังสือประจำปี ค.ศ. 1980 : Problem Solving in School Mathematics ว่า การแก้ปัญหาต้องเป็นจุดเน้นที่สำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งนำเสนอแนวคิดต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนการสอน การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ที่เชื่อว่า จะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพดีขึ้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2550: 6)

สติปัญญาของมนุษย์จะต้องประกอบด้วยทักษะในการแก้ปัญหาซึ่งจะผลักดันให้บุคคลคิดแก้ปัญหาหรือความยากลำบากขนานแท้ที่ต้องเผชิญได้ และในกรณีที่เหมาะสมจะสามารถสร้างผลผลิตหรือผลงานที่มีประสิทธิภาพ นอกจากนี้จะต้องมีศักยภาพในการค้นหาหรือสร้างปัญหาเพื่อเป็นการปูพื้นฐานของการได้มาซึ่งความรู้ใหม่ๆ ในรูปแบบของสิ่งซึ่งอาจได้รับการตีค่าแตกต่างกันไปอย่างสุดขั้วและชัดเจนในแต่ละวัฒนธรรมและในสภาพแวดล้อมบางประเภทการสร้างสรรคผลผลิตใหม่ หรือการเสนอปัญหาใหม่ๆ ก็อาจมีความสำคัญค่อนข้างน้อย (อภิญา สุรเสน, 2555: 53)

จากการสังเกตและทดลองสอนในปีการศึกษา 2564 การปฏิบัติการสอนในปีการศึกษา 2565 และการสัมภาษณ์หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำในเรื่องเศษส่วน เนื่องจาก นักเรียนยังขาดทักษะในการคิดคำนวณ ยังขาดทักษะในการดำเนินการเกี่ยวกับเศษส่วน เช่น ในการบวกและการลบเศษส่วน นักเรียนยังสงสัยว่าทำไมถึงต้องทำตัวส่วนให้เท่ากัน แต่ในทางกลับกันในการคูณและการหารเศษส่วนทำไมไม่ทำตัวส่วนให้เท่ากัน เป็นต้น และนักเรียนยังไม่สามารถลำดับเหตุการณ์ก่อนและในโจทย์ได้ทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้อง นักเรียนยังแสดงวิธีการหาคำตอบข้ามขั้นตอนอีกด้วย จากเหตุผลดังกล่าวทำให้นักเรียนมีปัญหาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเศษส่วน และยังส่งผลต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในเรื่องต่อไป เนื่องจากเนื้อหาส่วนมากในรายวิชาคณิตศาสตร์มีความต่อเนื่องกัน ส่วนมากนักเรียนเน้นการท่องจำ จึงทำให้แก้ปัญหาไม่ได้ จึงส่งผลต่อให้นักเรียนไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นควรพัฒนาในนักเรียนความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนและเรื่องอื่น ๆ ในรายวิชาคณิตศาสตร์ให้มากขึ้น และฝึกให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ เพื่อที่จะให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์กับศาสตร์ และสามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้

จากเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาแนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เพื่อเป็นแนวทางในการส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนาการเรียนรู้อื่นๆ และส่งเสริมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน และเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน จำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา เพื่อศึกษา

ระหว่างเพศชายหรือเพศหญิงว่ามีระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของแต่ละเพศ เพื่อที่จะหาแนวทางมาพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ต่อไป

### วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน
2. เพื่อเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน จำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา
3. เพื่อศึกษาแนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน

### สมมติฐานการวิจัย

1. ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำแนกตามเพศ มีความแตกต่างกัน
2. ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำแนกตามระดับสติปัญญา มีความแตกต่างกัน

### ขอบเขตการวิจัย

1. ประชากร  
ประชากรในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสารคามพิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดมหาสารคาม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษามหาสารคาม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 จำนวน 8 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียนทั้งหมด 336 คน
2. กลุ่มตัวอย่าง  
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสารคามพิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดมหาสารคาม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษามหาสารคาม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 จำนวน 5 ห้อง จำนวนนักเรียนทั้งหมด 210 คน ได้มาจากการสุ่มกลุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling)
3. ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย  
3.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่ เพศ, ระดับสติปัญญา

3.2 ตัวแปรตาม ได้แก่ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์, การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์, การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

4. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ เรื่องเศษส่วน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พุทธศักราช 2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

5. ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

### การทบทวนวรรณกรรม

Pirie and Kieren (1994: 65-67) กล่าวว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการเรียนรู้ที่ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และโจทย์ปัญหาอย่างลึกซึ้ง ตลอดจนผู้เรียนสามารถแปลความ ตีความ ขยายความในขั้นตอนวิธีการและสมบัติทางคณิตศาสตร์จนเกิดความเข้าใจในทักษะกระบวนการ และการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน ซึ่งแบ่งออกเป็น 8 ระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) หมายถึง ความเข้าใจในระดับนี้เป็นความรู้ พื้นฐานหรือประสบการณ์เดิมที่มีอยู่เพื่อนำไปจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ในการสร้างความหมายเพื่อพัฒนาระดับความเข้าใจต่อไปสำหรับในระดับความรู้พื้นฐานนี้ไม่ได้หมายความว่า เป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ระดับต่ำ แต่ความเข้าใจในระดับนี้เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่เฉพาะ ซึ่งเป็นสิ่งที่ผู้สังเกต ครู หรือผู้วิจัยคาดเดาวานักเรียนจะมีความรู้พื้นฐานนี้เพื่อไปสร้างมโนทัศน์ใหม่

ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ (Image Making) หมายถึง ความเข้าใจที่เกิดจากการที่ผู้เรียนนำความรู้พื้นฐานหรือประสบการณ์เดิมที่นักเรียนมีอยู่และที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ใหม่มาสร้างสิ่งที่แตกต่างจากความรู้พื้นฐานเพื่อใช้ในแนวทางใหม่ หรือมาสร้างความหมายจากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์

ระดับที่ 3 การมีมโนภาพ (Image Having) หมายถึง ความเข้าใจในระดับนี้ แนวคิด ทางคณิตศาสตร์หรือมโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากการที่นักเรียนจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ จนสามารถสร้างภาพความคิด ในใจโดยสามารถ อธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องแสดงการจัดกระทำเหมือนการสร้าง มโนภาพอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนทัศน์ที่ผิด

ระดับที่ 4 การสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) หมายถึง ความเข้าใจในระดับนี้เกิดขึ้นเมื่อ ผู้เรียนจัดการ หรือรวมแง่มุมของมโนภาพที่มีอยู่เพื่อสร้างคุณสมบัติที่เฉพาะและสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน รวมไปถึงการที่ผู้เรียนสามารถสร้างการเชื่อมโยงและหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพที่มีอยู่นั้น

ระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) หมายถึง ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปเชิงนามธรรม นิยาม สูตร หรือข้อสรุปทั่วไปของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติ

ระดับที่ 6 การสังเกต (Observing) หมายถึง ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถสะท้อน เชื่อมโยงรวมข้อสรุปเชิงนามธรรมเพื่อสร้างเป็นทฤษฎีบทได้

ระดับที่ 7 การสร้างโครงสร้าง (Structuring) หมายถึง ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนึกถึงข้อสรุปเชิงนามธรรมที่เป็นทฤษฎีบท นักเรียนตระหนักถึงการเชื่อมโยงภายในกลุ่มทฤษฎีบท และสามารถนำมาใช้ในการให้เหตุผลและพิสูจน์โดยไม่ต้องจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือขั้นตอนที่กำหนด

ระดับ 8 การสร้างมโนทัศน์ใหม่ (Inventizing) หมายถึง เป็นความเข้าใจในระดับสูงสุดโดยนักเรียนมีโครงสร้างของความเข้าใจสมบูรณ์ และสามารถนำไปเป็นความรู้พื้นฐานในการสร้าง มโนทัศน์ใหม่อยู่ในระดับที่สูงขึ้นได้

การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ภาษาทางคณิตศาสตร์และเป็นการแสดงสิ่งที่เป็นรูปธรรมจากนามธรรมเกี่ยวกับความคิดรวบยอดเพื่อที่จะช่วยในการอธิบายความคิด ดีความ และการแปลความหมายทำให้เข้าใจปัญหาหรืออุปสรรคที่เกิดขึ้น การแสดงแทนมีทั้งการแสดงแทนภายในและการแสดงแทนภายนอก การแสดงแทนภายในนั้นเป็นกรอบความคิดที่เกิดอยู่ในจิตใจและสามารถแสดงความคิดนั้นออกมาผ่านการแสดงภายนอกหรือการจำลองสถานการณ์ให้อยู่ในรูปที่สามารถสังเกตเห็นได้ ส่วนการแสดงแทนภายนอกนั้นเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์และมีหลายรูปแบบ เช่น การแสดงแทนในรูปข้อความหรือสัญลักษณ์ต่าง ๆ ตาราง กราฟ สื่อวัตถุที่สามารถจับต้องได้ เป็นต้น การแสดงแทนแต่ละรูปแบบสามารถเชื่อมโยงเพื่อให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์และยังต้องสามารถสื่อสารให้คนอื่นเข้าใจได้ด้วย ผู้วิจัยได้จากสังเคราะห์รูปแบบการแสดงแทนของนักการศึกษา ได้แก่ Hiebert (1990: 31-40), Lesh (1979: 11) Goldin (1998: 113) และ Goldin and Kaput (1996: 397-430) ดังนี้

การใช้สื่อหรืออุปกรณ์ (Manipulative) หมายถึง การสะท้อนความเข้าใจและความคิดเห็นทางเศษส่วน โดยผ่านสื่อวัตถุเชิงกายภาพ (Physical Materials) การแสดงแทนด้วยการใช้อุปกรณ์เชิงกายภาพของนักเรียนช่วยให้ครูเข้าใจระดับพัฒนาของนักเรียน และเป็นพื้นฐานสำหรับการอภิปรายแนวคิดทางการแก้ปัญหาลักษณะเฉพาะได้

การใช้สัญลักษณ์ (Symbols) หมายถึง การแสดงแทนโดยการใช้สัญลักษณ์เพื่อสะท้อนแนวคิดความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วน การแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์จะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนได้อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับเศษส่วนและนำไปสู่การแก้ปัญหาเฉพาะส่วนได้โดยการเขียนสัญลักษณ์ เช่น การวาดรูป กราฟ ตาราง การโยงเส้น การเขียนประโยคสัญลักษณ์ ตัวเลข การพูด การฟังหรือการอธิบายเกี่ยวกับความคิดรวบยอดในการแก้ปัญหาเฉพาะส่วน เป็นต้น

บริบทในชีวิตจริง (Real-life context) หมายถึง การแสดงแทนความคิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วนและการแก้ปัญหาเฉพาะส่วนที่ฝังตัวอยู่ในบริบทหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ผู้แก้ปัญหาคุ้นเคย ซึ่งจะก่อให้เกิดประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นทางการของนักเรียน และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงได้

กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการที่ใช้เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหานั้นเป็นหัวใจหลักสำคัญของคณิตศาสตร์เพราะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ช่วยให้นักเรียนพัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์ ทักษะกระบวนการต่าง ๆ การแก้ปัญหาไม่ได้มีเป้าหมายในการหาคำตอบเพียงอย่างเดียว แต่ขึ้นอยู่กับวิธีการของการกระทำที่ได้มาของคำตอบ ทั้งนี้ต้องอาศัยการฝึกฝนในการทำบ่อย ๆ เพื่อที่จะให้เกิดความรู้ใหม่ และความชำนาญในการแก้ปัญหา ผู้แก้ปัญหาจะต้องสามารถสะท้อนแนวคิดในการแก้ปัญหานั้นได้ด้วย

กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ Polya (1957) หมายถึง การหาวิธีทางที่จะหาสิ่งที่ไม่รู้ในปัญหาโดยหาวิธีการที่จะนำสิ่งที่ยุ่งยากออกไป เป็นวิธีการที่จะเอาชนะอุปสรรคที่เผชิญอยู่เพื่อจะให้ได้ข้อลงเอยหรือคำตอบที่มีความชัดเจน สิ่งเหล่านี้จะไม่เกิดขึ้นได้ทันที ซึ่งโพลยาได้จัดขั้นตอนการแก้ปัญหา ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจ หมายถึง ขั้นวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา สรุปปัญหาในภาษาของตนเอง สามารถบอกได้ว่าโจทย์ปัญหาถามหาอะไร ข้อมูลมีอะไรบ้าง เงื่อนไขคืออะไร ในการทำความเข้าใจปัญหาต้องพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วน พิจารณาเข้าไปเข้ามาและหลาย ๆ มุมมองแล้วสามารถสรุปออกมาได้

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา หมายถึง การค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลแล้วนำความสัมพันธ์มาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา เพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา

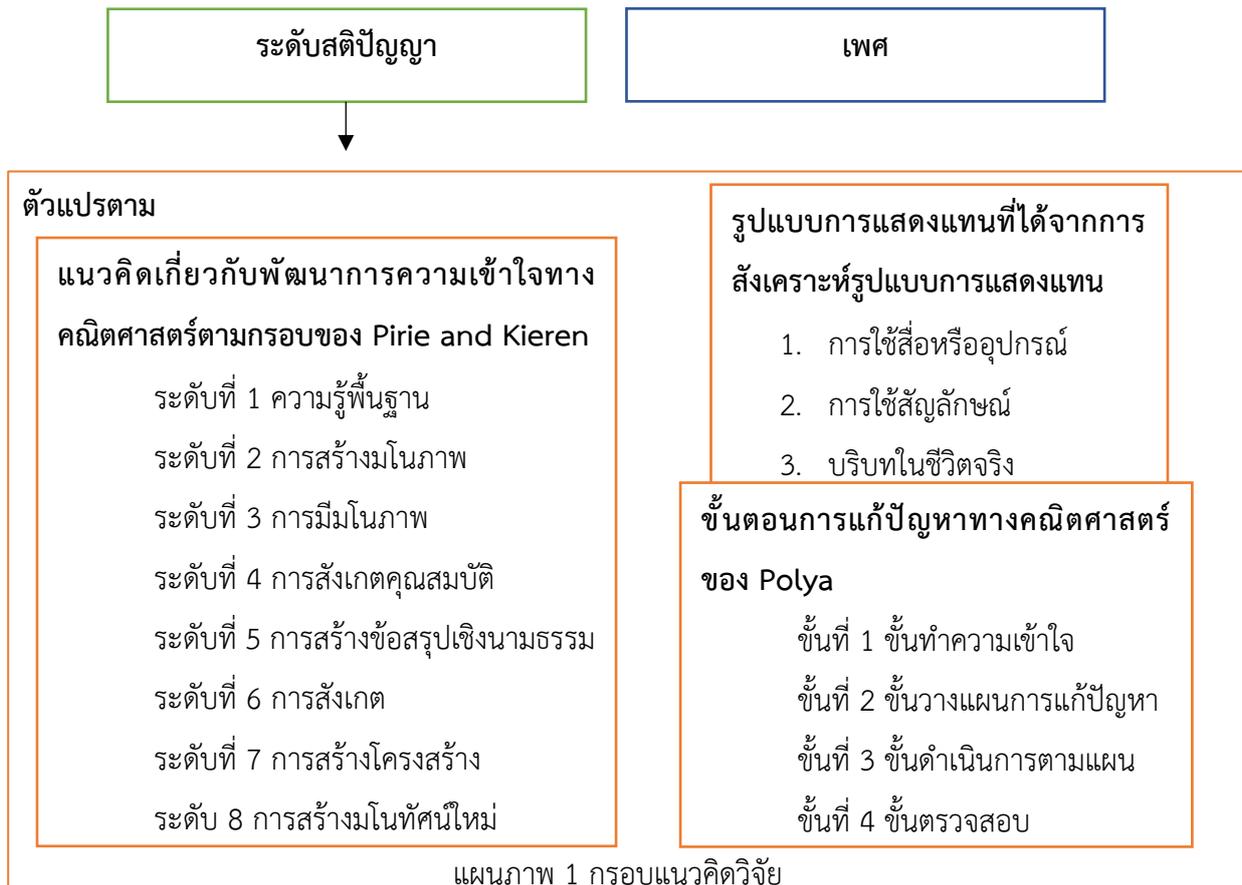
ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน หมายถึง ขั้นตอนที่ต้องลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่วางแผนการแก้ปัญหาไว้ เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดของแผนให้ชัดเจน ใช้ทักษะการคำนวณและเลือกใช้วิธีคำนวณที่เหมาะสม

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบ หมายถึง ขั้นการตรวจสอบคำตอบที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดไว้หรือไม่ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบ และการวิเคราะห์หาวิธีการอื่นมาแก้ปัญหา

### กรอบแนวคิดการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้กรอบแนวคิดแนวคิดเกี่ยวกับพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie and Kieren กรอบแนวคิดรูปแบบการแสดงแทนที่ได้จากการสังเคราะห์รูปแบบการแสดงแทน และกรอบแนวคิดขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

## ตัวแปรอิสระ



## ระเบียบวิธีการวิจัย

1. **ประชากร** คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสารคามพิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดมหาสารคาม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษามหาสารคาม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 จำนวน 8 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียนทั้งหมด 336 คน (ฝ่ายวิชาการโรงเรียนสารคามพิทยาคม, 2565) ส่วนกลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสารคามพิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดมหาสารคาม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษามหาสารคาม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 จำนวน 5 ห้องเรียน จำนวน 210 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) มีขั้นตอนในการสุ่ม

### 2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1 แบบทดสอบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วน เป็นแบบอัตนัย แบบแสดงวิธีทำ หรือการเขียนอธิบาย จำนวน 30 ข้อ แบบทดสอบมีค่าความยากตั้งแต่ 0.296-0.449 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.509-0.557 อยู่ในเกณฑ์ใช้ได้ มีค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบทั้งฉบับด้วยการวิเคราะห์ค่าความเชื่อมั่นโดยใช้การวิเคราะห์ความเชื่อมั่นแบบอิงเกณฑ์ของโลเวทท์ (Lovett's Method) เท่ากับ 0.555

2.2 แบบทดสอบการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วน แบบแสดงวิธีทำหรือการเขียนอธิบาย จำนวน 30 ข้อ แบบทดสอบมีค่าความยากตั้งแต่ 0.211-0.633 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.554-0.691 อยู่ในเกณฑ์ใช้ได้ มีค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบทั้งฉบับด้วยการวิเคราะห์ค่าความเชื่อมั่นโดยใช้การวิเคราะห์ความเชื่อมั่นแบบอิงเกณฑ์ของโลเวทท์ (Lovett's Method) เท่ากับ 0.646

2.3 แบบทดสอบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วน แบบแสดงวิธีทำหรือการเขียนอธิบาย จำนวน 30 ข้อ แบบทดสอบมีค่าความยากตั้งแต่ 0.244-0.585 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.593-0.684 อยู่ในเกณฑ์ใช้ได้ มีค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบทั้งฉบับด้วยการวิเคราะห์ค่าความเชื่อมั่นโดยใช้การวิเคราะห์ความเชื่อมั่นแบบอิงเกณฑ์ของโลเวทท์ (Lovett's Method) เท่ากับ 0.665

2.4 แบบสัมภาษณ์ เป็นแบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง จำนวน 3 ข้อ เพื่อบันทึกผลสัมภาษณ์ของผู้ทรงคุณวุฒิเพื่อหาแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

### 3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ระยะที่ 1 เพื่อศึกษาความเข้าใจในการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียน โดยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบทั้งหมด 3 ฉบับ ดังนี้

วันที่ 1 ทำแบบทดสอบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วน

วันที่ 2 ทำแบบทดสอบการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วน ในการทำแบบทดสอบผู้วิจัยจะมีการอัดวิดีโอขณะที่นักเรียนแสดงวิธีการแสดงแทนเกี่ยวกับเศษส่วนเพื่อที่จะวิเคราะห์ถึงการแสดงแทนการใช้สื่อหรืออุปกรณ์ การใช้สัญลักษณ์ และบริบทในชีวิตจริง

วันที่ 3 ทำแบบทดสอบเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วน

ระยะที่ 2 นำผลจากการทำแบบทดสอบมาจำแนกนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยสูง ช่วงค่าเฉลี่ยของคะแนนอยู่ระหว่าง 2.01-3.00 กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยปานกลาง ช่วงค่าเฉลี่ยของคะแนนอยู่ระหว่าง 1.01-2.00 และกลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยต่ำ ช่วงค่าเฉลี่ยของคะแนนอยู่ระหว่าง 0.00-1.00

4. การวิเคราะห์ข้อมูล: การวิจัยเรื่องแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการศึกษารายละเอียดต่อไปนี้

ตอนที่ 1 การวิเคราะห์ข้อมูลตามวัตถุประสงค์ข้อที่ 1) ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบทดสอบทั้ง 3 ฉบับ โดยใช้วิธีการศึกษาเฉพาะรายกรณี (Case Study Method) การวิเคราะห์งานเขียน (Task Analysis) และนำเสนอด้วยวิธีพรรณนาวิเคราะห์ (Descriptive Analysis)

**ตอนที่ 2** การวิเคราะห์ข้อมูลตามวัตถุประสงค์ข้อที่ 2) ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลจากการการเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนจำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา โดยใช้สถิติทดสอบ Two-Way MANOVA

**ตอนที่ 3** การวิเคราะห์ข้อมูลตามวัตถุประสงค์ข้อที่ 3) ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลจากงานเขียนของนักเรียนและการสัมภาษณ์ผู้ทรงคุณวุฒิโดยใช้แบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง เพื่อหาแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

### ผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 รวมถึงการเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนโดยจำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา และแนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน มีผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังรายละเอียดต่อไปนี้

**ตอนที่ 1** ผลการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

#### 1.1 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie and Kieren

### ตารางที่ 1 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie and Kieren

ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie and Kieren	$\bar{x}$	S.D.	แปลผล
ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน	0.38	0.53	ต้องปรับปรุง
ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ	0.75	0.80	น้อยมาก
ระดับที่ 3 การมีมโนภาพ	0.10	0.32	ต้องปรับปรุง
ระดับที่ 4 การสังเกตคุณสมบัติ	0.45	0.72	ต้องปรับปรุง
ระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม	0.11	0.44	ต้องปรับปรุง
ระดับที่ 6 การสังเกต	0.32	0.65	ต้องปรับปรุง
ระดับที่ 7 การสร้างโครงสร้าง	0.06	0.29	ต้องปรับปรุง
ระดับ 8 การสร้างมโนทัศน์ใหม่	0.04	0.23	ต้องปรับปรุง

จากตารางที่ 1 พบว่า ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie and Kieren นักเรียนมีความเข้าใจในระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ ( $\bar{x} = 0.75, S.D. = 0.80$ ) ความเข้าใจในระดับที่ 4 การสังเกตคุณสมบัติ ( $\bar{x} = 0.45, S.D. = 0.72$ ) ความเข้าใจในระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน ( $\bar{x} = 0.38, S.D. = 0.53$ ) ความเข้าใจในระดับที่ 6 การสังเกต ( $\bar{x} = 0.32, S.D. = 0.65$ ) ความเข้าใจในระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม ( $\bar{x} = 0.11, S.D. = 0.44$ ) ความเข้าใจในระดับที่ 3 การมีมโนภาพ ( $\bar{x} = 0.10, S.D. = 0.32$ ) ความเข้าใจในระดับที่ 7 การสร้างโครงสร้าง ( $\bar{x} = 0.06, S.D. = 0.29$ ) และความเข้าใจในระดับที่ 8 การสร้างมโนทัศน์ใหม่ ( $\bar{x} = 0.04, S.D. = 0.23$ )

## 1.2 ผลการศึกษาดำเนินการและการเปรียบเทียบเศษส่วนตามประเภทของการแสดงแทน

ตารางที่ 2 ผลการศึกษาดำเนินการและการเปรียบเทียบเศษส่วนตามประเภทของการแสดงแทน

ประเภทของ การแสดงแทน	สถิติพื้นฐาน	การดำเนินการและการเปรียบเทียบเศษส่วน					ค่าเฉลี่ยรวม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานรวม	แปลความหมาย
		การบวก	การลบ	การคูณ	การหาร	การเปรียบเทียบ			
การใช้สื่อหรืออุปกรณ์	$\bar{x}$	1.48	1.48	1.42	1.26	1.50	1.43	1.09	ปานกลาง
	$S.D.$	1.11	1.07	1.11	1.08	1.06			
การใช้สัญลักษณ์	$\bar{x}$	1.89	1.68	0.79	0.91	1.92	1.30	1.12	ปานกลาง
	$S.D.$	1.09	1.16	1.01	0.97	0.92			
บริบทในชีวิตจริง	$\bar{x}$			0.10	0.18	0.46	0.24	0.61	ต่ำ
	$S.D.$			0.35	0.60	0.74			

จากตารางที่ 2 พบว่า ผลการดำเนินการและการเปรียบเทียบเศษส่วนตามประเภทของการแสดงแทนเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย มีดังนี้ การแสดงแทนประเภทการใช้สื่อหรืออุปกรณ์ ( $\bar{x} = 1.43, S.D. = 1.09$ ) ประกอบด้วย การบวกเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.48, S.D. = 1.11$ ) การลบเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.48, S.D. = 1.07$ ) การคูณเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.42, S.D. = 1.11$ ) การหารเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.26, S.D. = 1.08$ ) การเปรียบเทียบเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.50, S.D. = 1.06$ ) การแสดงแทนประเภทการใช้สัญลักษณ์ ( $\bar{x} = 1.30, S.D. = 1.12$ ) ประกอบด้วย การบวกเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.89, S.D. = 1.09$ ) การลบเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.68, S.D. = 1.16$ ) การคูณเศษส่วน ( $\bar{x} = 0.79, S.D. = 1.01$ ) การหารเศษส่วน ( $\bar{x} = 0.91, S.D. = 0.97$ ) การเปรียบเทียบเศษส่วน ( $\bar{x} = 1.92, S.D. = 0.92$ ) และการแสดงแทนประเภทการใช้บริบทในชีวิตจริง ( $\bar{x} = 0.24, S.D. = 0.61$ ) ประกอบด้วย

การคูณเศษส่วน ( $\bar{x} = 0.10, S.D. = 0.35$ ) การหารเศษส่วน ( $\bar{x} = 0.18, S.D. = 0.60$ ) การเปรียบเทียบเศษส่วน ( $\bar{x} = 0.46, S.D. = 0.74$ )

1.3 ผลการศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya

**ตารางที่ 3** ผลการศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya

ขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya	$\bar{x}$	S.D.	แปลผล
ขั้นทำความเข้าใจ	0.72	1.21	ต้องปรับปรุง
ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา	0.53	1.03	ต้องปรับปรุง
ขั้นดำเนินการตามแผน	0.46	0.97	ต้องปรับปรุง
ขั้นตรวจสอบ	0.19	0.61	ต้องปรับปรุง

จากตารางที่ 3 พบว่า ผลการศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya เรียงตามลำดับจากมากไปน้อย ดังนี้ ขั้นทำความเข้าใจ ( $\bar{x} = 0.72, S.D. = 1.21$ ) ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ( $\bar{x} = 0.53, S.D. = 1.03$ ) ขั้นดำเนินการตามแผน ( $\bar{x} = 0.46, S.D. = 0.97$ ) และขั้นตรวจสอบ ( $\bar{x} = 0.19, S.D. = 0.61$ )

**ตอนที่ 2** การเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนจำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา โดยใช้สถิติทดสอบ Two-Way MANOVA

ผลการทดสอบความแปรปรวนระหว่างตัวความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา (Two-Way MANOVA)

**ตารางที่ 4** ผลการทดสอบความแปรปรวนระหว่างตัวความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา (Two-Way MANOVA)

Tests of Between-Subjects Effects						
Source	Dependent Variable	SS	df	MS	F	Sig.
เพศ	ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์	43.675	1	43.675	1.469	.227

## Tests of Between-Subjects Effects

Source	Dependent Variable	SS	df	MS	F	Sig.
	การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์	150.771	1	150.771	3.826	.052
	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	20.545	1	20.545	1.253	.264
	ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์	1011.694	2	505.847	17.017	.000
ระดับสติปัญญา	การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์	1063.771	2	531.885	13.498	.000
	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	321.230	2	160.615	9.794	.000
	ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์	6064.063	204	29.726		
Error	การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์	8038.500	204	39.404		
	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	3345.382	204	16.399		
	ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์	18712.000	210			
Total	การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์	81719.000	210			
	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	15299.000	210			
	ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์	7153.124	209			
Corrected Total	การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์	9327.567	209			
	การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	3725.281	209			
	ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์					

จากตารางที่ 4 พบว่า ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนรายตัวแปรทั้ง 3 ตัวแปร ได้แก่ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในเพศ พบว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มีค่า Sig. = .227 การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ มีค่า Sig. = .052 และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีค่า Sig. = .264 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญ .05 ทั้งสามตัวแปร แสดงว่าความแปรปรวนของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไม่มีความแตกต่างกัน ระหว่างนักเรียนชายและนักเรียนหญิง ทั้ง 3 ตัวแปร และในระดับสติปัญญา พบว่าความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มีค่า Sig. = .000 การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ มีค่า Sig. = .000 และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีค่า Sig. = .000 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญ .05 ทั้งสามตัวแปร แสดงว่าความแปรปรวนของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีความแตกต่างกัน ระหว่างนักเรียนที่นักเรียนที่มีระดับสติปัญญาสูง นักเรียนที่มีระดับสติปัญญาปานกลาง และนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาต่ำ ทั้ง 3 ตัวแปร มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สรุปได้ว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเฉพาะส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำแนกตามเพศไม่มีความแตกต่างกัน แต่จำแนกตามระดับสติปัญญาแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 3 ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลจากงานเขียนของนักเรียนและการสัมภาษณ์ผู้ทรงคุณวุฒิโดยใช้แบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง เพื่อหาแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

แนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปัญหาที่ส่งผลต่อความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนและแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน ปัญหาที่พบ คือ (1) นักเรียนไม่สามารถแปลความ ตีความ จากโจทย์ได้ และไม่สามารถแปลงประโยคข้อความเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ (2) นักเรียนยังขาดทักษะพื้นฐานในการคิดคำนวณ การดำเนินการต่าง ๆ เกี่ยวกับเศษส่วน การลำดับเหตุการณ์ และทำข้ามขั้นตอน (3) นักเรียนไม่เข้าใจในสมบัติทางคณิตศาสตร์ และ (4) นักเรียนยังไม่เข้าใจในความหมายของเศษส่วน แนวทางการพัฒนา คือ ในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนคือ ในการดำเนินการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ไม่ได้มีวิธีที่ตายตัว สามารถใช้ได้หลากหลายวิธี ครูจะต้องพานักเรียนแสดงวิธีทำที่หลากหลายในโจทย์ข้อเดียว และในการตอบแต่ละครั้งควรทำให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ การใช้สื่อหรืออุปกรณ์ ในการจัดการเรียนการสอนเรื่องเศษส่วน ครูจะต้องใช้อุปกรณ์ที่สามารถจับต้องได้เข้ามาช่วยในการอธิบายเกี่ยวกับเศษส่วน เนื่องจากการสอนของคุณครูอาจจะเป็นการบรรยายหรือการเขียนอย่างเดียว ทำให้นักเรียนไม่สามารถใช้ในการแสดงแทนได้ ในการใช้สัญลักษณ์ในการแสดงแทนเกี่ยวกับเศษส่วน ครูจะต้องอธิบายให้นักเรียนได้เข้าใจเกี่ยวกับความหมายของเศษส่วน อย่างละเอียด เพราะถ้าไม่เข้าใจความหมายของเศษส่วนแล้ว ก็จะไม่สามารถใช้สัญลักษณ์ในการแสดงแทนเกี่ยวกับเศษส่วนได้ถูกต้อง และครูจะต้องอธิบายวิธีการในการดำเนินการอย่างละเอียดและชัดเจน ไม่ควรทำวิธีลัด ครูควรจะอธิบายและแสดงวิธีการหาคำตอบพร้อมกับการตรวจคำตอบ และวิธีการสรุปคำตอบให้นักเรียนดู และให้นักเรียนได้ลองทำโจทย์ในการแสดงวิธีการหาคำตอบพร้อมทั้งตรวจคำตอบ และการใช้บริบทในชีวิตจริง ทำให้นักเรียนฝึกลองทำโจทย์จากง่ายไปยากพร้อมกับฝึกสรุปคำตอบ เพื่อพัฒนาทักษะของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

## อภิปรายผล

ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie and Kieren พบว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาสูง คือ ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาสูง คือ การใช้สัญลักษณ์ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วนของนักเรียนมีระดับสติปัญญาสูง เรียงลำดับตามคะแนนของค่าเฉลี่ยที่มากที่สุด คือ ขั้นทำความเข้าใจ ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบ ตามลำดับ ทั้งนี้เนื่องมาจากนักเรียนสามารถเขียนขั้นตอนแสดงวิธีทำในการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วนหรือไม่เขียนขั้นตอนแสดงวิธีแก้ปัญหา และยังไม่สามารถหาคำตอบได้ถูกต้อง เนื่องจากนักเรียนขาดทักษะพื้นฐานในการคิดคำนวณเรื่องจำนวนเต็มหรือไม่ก็เกิดจากการลืมใส่เครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ในระหว่างเขียนแสดงวิธีทำ

และดำเนินการข้ามขั้นตอน จึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคิดคำนวณไม่ถูกต้อง นอกจากนี้นักเรียนสามารถแปลความหรือตีความจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสามารถเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งสอดคล้องกับ Wilson (1971: 661) ได้กล่าวถึง ความหมายของความเข้าใจคณิตศาสตร์ว่า ความสามารถในการแปลความ (Translation) ตีความ (Interpretation) และขยายความ (Extrapolation) ในปัญหาใหม่ ๆ โดยการนำเอาความรู้ที่ได้เรียนมา ไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. ผลการเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำแนกตามเพศและระดับสติปัญญา พบว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียน จำแนกตามระดับสติปัญญา แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งนี้เนื่องมาจากระดับสติปัญญาจะประกอบด้วยทักษะในการแก้ปัญหา ซึ่งในการที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ นั้นจะต้องมีความเข้าใจก่อนที่จะลงมือแก้ปัญหา พอมีความเข้าใจก็จะสามารถคิดค้นหาวิธีการแก้ปัญหานั้นได้ สิ่งนั้นเรียกว่าทักษะในการแก้ปัญหา ซึ่งทักษะในการแก้ปัญหาหรือระดับสติปัญญาของมนุษย์นั้นไม่เท่ากัน ขึ้นอยู่กับการฝึกหาความรู้เพิ่มเติมให้ตัวเองและฝึกฝนทักษะเสมอ ซึ่งสอดคล้องกับ อภิญา สุรเสน (2555: 53) กล่าวว่า สติปัญญาของมนุษย์จะต้องประกอบด้วยทักษะในการแก้ปัญหาซึ่งจะผลักดันให้บุคคลคิดแก้ปัญหาหรือความยากลำบากนานเท่าที่ ต้องเผชิญได้ และในกรณีที่เหมาะสมจะสามารถสร้างผลผลิตหรือผลงานที่มีประสิทธิภาพ นอกจากนี้จะต้องมีศักยภาพในการค้นหาหรือสร้างปัญหาเพื่อเป็นการปูพื้นฐานของการได้มาซึ่งความรู้ใหม่ๆ ในรูปแบบของสิ่งซึ่งอาจได้รับการตีค่าแตกต่างกันไปอย่างสุดขั้วและชัดเจนในแต่ละวัฒนธรรม และในสภาพแวดล้อมบางประเภท การสร้างสรรค์ผลผลิตใหม่ หรือการเสนอปัญหาใหม่ๆ ก็อาจมีความสำคัญค่อนข้างน้อย

3. แนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปัญหาที่ส่งผลต่อความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนและแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วน ปัญหาที่พบ คือ (1) นักเรียนไม่สามารถแปลความ ตีความ จากโจทย์ได้ และไม่สามารถแปลงประโยคข้อความเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ (2) นักเรียนยังขาดทักษะพื้นฐานในการคิดคำนวณ การดำเนินการต่าง ๆ เกี่ยวกับเศษส่วน การลำดับเหตุการณ์ และทำข้ามขั้นตอน (3) นักเรียนไม่เข้าใจในสมบัติทางคณิตศาสตร์ และ (4) นักเรียนยังไม่เข้าใจในความหมายของเศษส่วน แนวทางการพัฒนา คือ ครูจะต้องพานักเรียนแสดงวิธีทำที่หลากหลายในโจทย์ข้อเดียว การใช้สื่อหรืออุปกรณ์ในการจัดการเรียนการสอนเรื่องเศษส่วน ครูจะต้องอธิบายวิธีการในการดำเนินการอย่างละเอียดและชัดเจน พร้อมกับการตรวจคำตอบ และวิธีการสรุปคำตอบ ซึ่งสอดคล้องกับ Santoro (2004: 95) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้จากสถานการณ์จริงนั้นจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดแนวคิดและมุมมองที่หลากหลายผ่านจากการเรียนรู้และได้แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน แล้วนำความรู้เหล่านั้นมาประยุกต์ใช้ในการปรับปรุงหรือสร้างชิ้นงานใหม่ ๆ ที่นำไปสู่การคิดริเริ่มในการคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

## ข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง แนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้มีข้อเสนอแนะเพื่อนำผลการวิจัยไปใช้ และเพื่อทำการวิจัยครั้งต่อไป มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

### 1. ข้อเสนอแนะเพื่อนำผลการวิจัยไปใช้

1.1 เป็นข้อสนเทศ ในการพัฒนาความเป็นเลิศทางวิชาการของนักเรียนโดยเฉพาะทางด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสารคามพิทยาคม

1.2 ข้อมูลการวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปเป็นข้อสนเทศในการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตลอดจนเป็นแนวทางให้ครู และผู้ที่เกี่ยวข้องทางการศึกษาได้นำไปพัฒนาและส่งเสริมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

1.3 เป็นข้อสนเทศ ในการหาแนวทางการยกระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ปรับปรุง และพัฒนาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริม พัฒนาผู้เรียนในด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

### 2. ข้อเสนอแนะเพื่อทำการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เพื่อให้ทราบถึงสิ่งที่ส่งผลต่อความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และอาจสามารถนำมาพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนต่อไป

2.2 ควรศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาชั้นอื่น ๆ เพื่อให้ครอบคลุมในทุกๆระดับชั้น

2.3 ควรมีการทำงานวิจัยเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแนวทางพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทุกระดับชั้น

2.4 แบบทดสอบและเนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการแสดงแทนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไม่ควรมากเกินไป เนื่องจากจะทำให้เด็กนักเรียนมีความเหนื่อยล้าในการทำแบบทดสอบ จะทำให้เด็กนักเรียนไม่ตั้งใจในการทำแบบทดสอบ

## เอกสารอ้างอิง

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2550). *การวัดประเมินผลเพื่อคุณภาพ การเรียนรู้และตัวอย่างข้อสอบจากโครงการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (PISA)*. กรุงเทพฯ: เซเวนพรีนติ้งกรุ๊ป.
- อภิญา สุรเสน. (2555). *การพัฒนาสติปัญญาโดยใช้กิจกรรมศิลปะสร้างสรรค์ด้วยวัสดุในท้องถิ่นตามแนวคิดพหุปัญญาของเด็กปฐมวัย*. วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตมหาสารคาม : มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- Goldin, A. G., & Janvier, C. (1998). Representations and Psychology of Mathematics Education (Electronic version]. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 1-4
- Goldin, G.A., & Kaput, J.J. (1996). *A joint perspective on the idea of representation in Learning and doing mathematics*. In L. P. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of Mathematical learning* (pp.397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.
- Hiebert, J. (1990). *The role of routine procedures in the development of mathematical competence*. In T. J. Cooney (Ed.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s: 1990 yearbook* (pp. 31-40). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- Kaput, J.J. (1991). *Notations and representations as mediators of constructive processes*. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education Netherlands*: Kluwer Academic Publishing.
- Lesh, R., (1979). *Mathematical learning disabilities: considerations for identification, diagnosis, and remediation, Applied Mathematical Problem Solving*. Ohio: ERIC/SMEAC
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action*. Rston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*.VA: NCTM
- National Council of Teachers of Mathematics. (2002). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994). *Beyond metaphor: Formalising in mathematical understanding within constructivist environments*. *For the Learning of Mathematics*. 14(1), 39-43
- Polya, G., (1957). *How to Solve it*. Garden City, New York: Double Anchor Book
- Santoro, A.M. (2004). *The Academic Value of Hands-on Craft Project in School*, New York
- Tsuji, H. (2007). *What kind of Teaching Materials and Aids are Used in Japan? Japanese Lesson Study in Mathematics: Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement*. Japanese: World Scientific Publishing Co. Pte.
- Wilson, J.W. (1971). *Evaluation of Learning and Summative Evaluation of Student Learning*. New York: McGraw-Hill.